S. 1109. B.5

MISCELLANEA TAURINENSIA

TOMUS V.

E. 1109.B.5.

MÉLANGES

DE

PHILOSOPHIE ET DE MATHEMATIQUE

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE

DE TURIN

POUR LES ANNÉES 1770-1773.

À TURIN

DE L' IMPRIMERIE ROYALE.

AVEC PERMISSION.

NATURAL HISTORY

SIRE

La Societé Royale de Turin oſe paroître aujourd'hui avec d'autant plus de confiance aux pieds du trône de Votre Majeſté, qu'en vous offrant le fruit de ſes travaux, elle peut s'applaudir de vous

préſenter votre propre ouvrage. C' eſt au zèle éclairé de V. M. pour le progrès des connoiſſances dignes de l' homme & vraiment utiles à l' humanité, que cette Societé doit ſa naiſſance; les graces dont elle fut honorée par le Roi votre Père de glorieuſe mémoire, l' empreſſement que tant d' hommes illuſtres des nations étrangères ont témoigné de prendre part à ſes travaux, de l' enrichir de leurs productions & de s' aſſocier à la gloire, que la faveur d' un Prince, juſte appréciateur des ſciences & des arts, fait rejaillir ſur ceux qui les cultivent. Les ſages, les ſavans de toute l' Europe, qui ont eu le bonheur de Vous approcher, ne nous reprocheront pas ici le langage impoſteur de la flatterie. Il doit nous être permis, SIRE, de nous en rapporter à leur témoignage, & il eſt auſſi heureux que conſolant pour nous de trouver, dans leurs éloges, des interprètes non ſuſpects de nos ſentimens. Combien de fois les avons-nous entendus relever avec complaiſance, non ſeulement cet accueil gracieux, où la grandeur ne paroît que pour rendre l' affabilité plus touchante, mais encore ces entretiens ſuivis, où ils ont été étonnés de pouvoir déployer tout leur génie en raiſonnant avec un Prince, éga-

lement en état de profiter de leurs lumières, & de leur en communiquer. Le trône n' a rien changé à vos dispositions, il n' a fait que laisser à vos vertus le moyen de paroître ce qu' elles étoient, & ajouter à la volonté de faire le bien, le pouvoir de le faire plus efficacement & avec plus d' étendue. La providence a voulu signaler les commencemens de votre Regne par un bienfait inestimable, en accordant le salut de vos peuples au premier usage que vous avez fait du pouvoir suprême qu' elle venoit de vous confier. Nous n' osons entreprendre de peindre les traits sublimes de sagesse & de bienfaisance, qui ont paru dans ces momens décisifs: ils sont gravés dans tous les cœurs, & ils éclatent dans toutes les occasions par ces transports d' allegresse & de reconnoissance, que la présence d' un bon Prince inspire, & qu' il est si aisé de distinguer de ces mouvemens forcés, qui partent de l' envie de plaire, ou de la crainte d' offenser. L' intérêt général de la societé humaine ne peut que porter nos confrères étrangers à joindre leurs veux aux notres pour la gloire & la prospérité d' un Souverain qui ne respire que le bien de l' humanité. Regnez, SIRE, pour le bonheur de vos peuples, pour jouir de leur amour, pour

le triomphe de la Religion & de la vertu, pour assurer au mérite & aux vrais talens la protection qu' ils attendent de V. M. La Societé Royale tâchera de la mériter par son ardeur à remplir les objets de sa destination, heureuse, si par l' assiduité de ses recherches, elle parvient à ouvrir quelque nouvelle vue d' utilité, qui puisse fournir à V. M. de nouveaux moyens d' exercer sa bienfaisance envers les humains.

Nous avons l' honneur d' être avec le plus profond respect

SIRE

De V. M.

Les très-humbles, très-obeissants, très-fidelles serviteurs & sujets les Associés de votre Académie Royale des Sciences.

TABLE

Des Mémoires contenus dans ce Volume.

Dans la classe Philosophique.

De l'Ordre, par le *P. Gerdil Barnabite* pag. 1.
Examen Physico-chimique sur la couleur des fleurs, & de quelques autres substances végétales, par M.r le Comte Mouroux - - - pag. 11.
Caroli Allioni. Auctarium ad synopsim methodicam stirpium Horti Reg. Taurinensis - - pag. 53.
Johannis Francisci Cigna. De electricitate pag. 97.
Johannis Francisci Cigna. De respiratione pag. 109.
Johannis Petri Mariæ Dana. De solano melanocerasso H. R. Taur. - - - - pag. 162.
Second mémoire sur la différente dissolubilité des sels neutres dans l'esprit de vin, contenant des observations particulières sur plusieurs de ces sels, par M.r Maquer - - - - - pag. 137.
Réflexions sur un essai de chimie comparée, par M.r le Comte de Saluce - - - pag. 191.

Dans la classe Mathématique.

Mémoire sur différenies questions d'analyse, par M.r le Marquis de Condorcet - - pag. 1.
Addition, ou Mémoire sur les solutions particulières des équations différentielles, par M.r le Marquis de Condorcet - - - - - pag. 12.

Mémoire sur la détermination des fonctions arbitraires dans les intégrales de quelques équations aux différences partielles, par M.r MONGE . . pag. 16.
Second Mémoire sur le calcul intégral de quelques équations aux différences partielles par M.r MONGE pag. 79.
Sur la figure des colonnes, par M.r DE LA GRANGE pag. 123.
Mémoire sur l'utilité de la méthode de prendre le milieu entre le résultat de plusieurs observations, dans lequel on examine les avantages de cette méthode par le calcul des probabilités, & où l'on resoud différens problèmes relatifs à cette matière, par M.r DE LA GRANGE - - - pag. 167.
Theorème pour servir de suite au mémoire sur différentes questions d'analyse, par M.r LE MARQUIS DE CONDORCET - - - - - pag. 233.
Nouvelles recherches sur les équations déterminées, pour servir de suite, & de développement au mémoire sur le même objet, déja inséré dans ce volume, par M.r LE MARQUIS DE CONDORCET pag. 236.

Imprimatur.

JOHANNES DOMINICUS PISELLI Ord. Præd. S. T. M.
Vic. gen. S. Officii Taurini.

Se ne permette la ſtampa

GALLI per S. E. il Sig. Conte CAISSOTTI DI S. VITTORIA
Gran Cancelliere.

DE L'ORDRE

PAR LE P. GERDIL BARNABITE.

L'homme a la faculté de comparer ſes idées, & de découvrir par ce moyen les rapports qui ſont entr'elles, ou entre les objets qu'elles repréſentent. C'eſt en quoi conſiſte la connoiſſance du vrai. En comparant deux angles droits, j'apperçois que ces deux angles ſont égaux, & ce rapport d'égalité eſt une vérité.

C'eſt par cette même faculté de comparer les objets, & d'en découvrir les rapports que l'homme s'élève à l'intelligence de l'ordre, de la beauté, & de la perfection.

Lorſqu'en comparant deux objets l'eſprit apperçoit un rapport quelconque entr'eux, c'eſt connoître ſimplement une vérité, ainſi qu'on vient de le dire. Si la médaille *A*, & la médaille *B*, que j'ai ſous les yeux, ſont égales entr'elles, en connoiſſant ce rapport d'égalité, je connois ſimplement une vérité, & rien de plus.

Lorſqu'en comparant les rapports de liaiſon, que pluſieurs objets ont entr'eux, je découvre un rapport commun qui exige, qu'ils ſoient liés, ou placés d'une telle maniere, plutôt que de toute autre, tout arrangement ainſi déterminé par un rapport commun me donne l'idée de l'ordre. Je vois une ſuite de médailles impériales ſur une table. Céſar eſt le premier, Auguſte le ſecond. Le rapport de Céſar à Auguſte comme à ſon ſucceſſeur immédiat, exige que Tibère ſoit placé après Auguſte, & ainſi de ſuite. Ce rapport de ſucceſſion immédiate eſt ainſi le principe déterminant qui fixe la place de chaque médaille, & fournit la raiſon pourquoi elle eſt placée en tel endroit, plutôt qu'en tout autre. Or un arrangement où tous les termes ſont placés, en vertu d'un principe qui détermine la poſition de chacun, c'eſt ce qui conſtitue l'idée de l'ordre.

Ainſi l'ordre eſt fondé en nature auſſi bien que le vrai. Ils réſultent l'un & l'autre des rapports des choſes. Un ſimple rapport eſt une vérité ; un rapport qui amene un autre rapport forme l'ordre, & la connoiſſance de l'ordre n'eſt, pour ainſi dire, dans l'homme, qu'une extenſion de l'intelligence du vrai.

Il y a cette différence entre la connoiſſance du vrai, & la connoiſſance de l'ordre, que la première (en tant qu'elle ſe borne au ſimple rapport, indépendemment de l'importance, ou de l'excellence de l'objet) eſt ſuivie d'un ſimple acte d'affirmation, par lequel je me dis à moi-même, que la choſe eſt telle que je l'apperçois. Quand j'apperçois l'égalité de deux angles droits, je me dis à moi-même, que deux angles droits ſont égaux, j'affirme cette égalité, & voilà tout. Mais la connoiſſance de l'ordre eſt de plus ſuivie d'un ſentiment d'approbation, par lequel je me dis à moi-même, non ſeulemente que la choſe eſt comme elle eſt, mais de plus qu'elle eſt comme elle doit être. Ce ſentiment d'approbation eſt toujours ſuivi d'un mouvement de complaiſance, puiſqu'il n'eſt pas poſſible de ne pas ſe complaire en ce qu'on approuve.

Il y a donc une ſorte de diſtinction à faire entre la complaiſance qui accompagne la connoiſſance du vrai, (conſidéré comme ſimple rapport, & abſtraction faite de la qualité de l'objet) & celle qui accompagne la connoiſſance de l'ordre. La connoiſſance du vrai eſt ſuivie d'un ſentiment de complaiſance, & de ſatisfaction, parceque l'intelligence tend au vrai, comme à ſon objet, qu'elle fait effort pour le trouver, & que la ceſſation de cet effort, lorſqu'elle parvient à le découvrir, répand dans l'ame cette douce ſatisfaction que la nature a ménagée dans le paſſage du déſir à la poſſeſſion. Mais la vue de l'ordre excite de plus la complaiſance qui accompagne néceſſairement l'approbation ; c'eſt-à-dire cet acte de l'ame, par lequel on ſe dit qu'une choſe eſt telle, qu'elle doit être.

L'ordre facilite les progrès de l'intelligence, & de la raiſon. Ce n'eſt qu'en ſuivant le rapport, & la liaiſon des idées que l'eſprit paſſe d'une vérité connue à une vérité qui ne l'étoit pas. L'eſprit ſaiſit, & retient avec plus de facilité les objets où il apperçoit un certain ordre; il les diſtingue, & les compare plus aiſément: cette liaiſon les repréſente comme formant un ſeul tout, & par ce moyen l'homme ſe rend capable d'embraſſer un plus grand nombre d'objets par une ſeule vue de l'eſprit, en quoi conſiſte principalement la perfection de l'intelligence.

L'homme ne peut non plus rien exécuter, qu'en vertu d'un certain ordre, par lequel il diſpoſe les moyens d'une maniere convenable à la fin qu'il ſe propoſe. La raiſon a, pour ainſi dire, une double fonction dans l'homme, elle nous a été donnée pour développer les progrès de l'intelligence, & appliquer l'intelligence à l'action, & c'eſt toujours l'ordre qui la dirige ſous ce double rapport, en ſorte qu'on pourroit dire en un certain ſens, que comme le vrai eſt l'objet de l'intelligence, ainſi l'ordre eſt proprement l'objet de la raiſon. *Ratio eſt facultas ordinatrix.* C'eſt ainſi que quelques anciens ont défini la raiſon, & ſous ce point de vue on pourroit dire que le propre de la raiſon eſt de ſuivre l'ordre convenable des idées pour mettre un ordre convenable dans l'action.

Tout ordre, ou arrangement préſente une ſuite d'idées, ou de termes déterminés par un rapport commun. Ce rapport ſe trouve 1° dans les ſuites mathématiques indéfinies, telles que la progreſſion des nombres naturels, ou des nombres impairs &c.

Si je compare les deux termes 1 & 2, & que j'enviſage de combien le ſecond terme excède le premier, ce rapport de différence me fait voir qu'après 2 je dois placer le 3, & ainſi de ſuite.

Si en comparant ces deux termes j'enviſage le rapport géométrique de l'un à l'autre, c'eſt-à-dire que le ſecond contient deux fois le premier, la continuation de ce rapport m'avertit, qu'après le 2 je dois placer le 4, enſuite le 8, & ainſi de ſuite.

Ces ſéries ſont ſansdoute ordonnées, mais, comme elles ſont indéfinies, l'eſprit ne peut jamais ſaiſir la totalité des termes dont elles ſont ſuſceptibles; il ne ſauroit jamais en embraſſer tout l'enſemble d'une ſeule vue, & delà vient que cet ordre, pour ainſi dire, indéterminé, ne ſauroit le ſatisfaire pleinement.

2° Pour déterminer l'ordre qui réſulte des ſimples rapports de quantité, il faut conduire la ſuite juſqu'à un certain point, & enſuite, par des rapports réciproques ou rétrogrades la ramener de l'autre côté au même terme dont on étoit parti.

Soit une ſuite de termes *A. B. C.* dont une raiſon quelconque détermine l'excès de *B.* ſur *A.*, & de *C.* ſur *B.* Cette ſuite continuant à croître iroit à l'infini; & jamais l'eſprit ne pourroit en embraſſer la totalité.

Mais ſi l'on la continue de l'autre côté par une ſuite de rapports inverſes, on aura les termes *D.*, & *E.* qui répondront exactement aux termes *A.*, & *B.* la ſuite ſera ainſi terminée; l'eſprit en ſaiſira la totalité, & la correſpondance des termes *A.*, & *E.*, *B.*, & *D.*, relativement au terme du milieu, préſentera une raiſon claire, & déterminante de leur poſition, en quoi conſiſte l'idée de l'ordre. Voilà pourquoi la correſpondance des termes, d'où nait la ſymmétrie plait naturellement à l'eſprit. Et c'eſt auſſi la raiſon de cette regle générale, que lorſqu'il

1 1 1	1 1 1 1 1
A. B. C.	*A. B. C. D. E.*

y a deux parties ſemblables, & une diſſemblable, il faut placer la diſſemblable au milieu ; regle puiſée dans la nature même qui nous en offre des modeles, ſurtout dans la conformation des animaux.

Tout aſſemblage de moyens propres à produire un effet convenablement au but que l'on ſe propoſe, forme un tout ordonné ; dans cette ſorte d'aſſemblages l'ordre réſulte du rapport des moyens à la fin ; & c'eſt même cette eſpece d'ordre qui nous affecte le plus vivement.

En ce genre l'ordre le plus parfait eſt celui qui réſulte d'une combinaiſon de moyens propres à produire l'effet déſiré le plus *facilement*, le plus *ſûrement*, & le plus *pleinement* qu'il ſoit poſſible.

La facilité doit faire préférer l'ordre, par lequel on arrive au même but avec le moins d'appareil, & de complication de termes, & d'inſtruments ; & la ſûreté même du ſuccès dépend en grande partie de la ſimplicité des moyens.

Soit une machine compoſée de dix pieces pour produire un effet qui peut être produit avec une machine de trois pieces, telle que Zabaglia les ſavoit imaginer : je dis que cette premiere machine multiplie les *termes*, ſans multiplier les *moyens* : elle multiplie les termes, puiſqu'elle en renferme un plus grand nombre ; elle ne multiplie pas les moyens, puiſque les trois pieces dans l'autre machine font autant d'effet que les dix pieces de celle-ci.

Comparez le ſyſtême de Ptolomée avec l'hypotheſe de Copernic. Il s'agit d'expliquer le cours apparent des Aſtres. Les ſimples rapports de viteſſe, & de diſtance ſuffiſent dans le ſyſtême de Copernic pour ſatisfaire à toutes les apparences ; dans le ſyſtême de Ptolomée il a fallu imaginer des cieux particuliers pour le mouvement propre de chaque planete, un premier mobile pour leur imprimer un mouvement commun en ſens contraire, des Epicycles pour expliquer les ſtations, & les rétrogradations. La machine

eſt beaucoup plus compoſée, & n'explique rien de plus: elle explique même moins: car dans ce ſyſtême il n'eſt pas poſſible d'expliquer, comment Mars eſt quelques fois plus proche de la terre, que le ſoleil; ni comment Vénus, & Mercure ſe trouvent en oppoſition avec le ſoleil, ayant la terre entre-deux.

On voit par cet exemple comment il arrive de multiplier les termes, ſans multiplier les moyens. Ce défaut de ſimplicité vient toujours d'un défaut de lumieres. Si une ſeule idée intermédiaire ſuffit pour lier deux idées extrêmes, l'eſprit qui apperçoit la liaiſon des deux extrêmes par le moyen de cette ſeule idée intermédiaire ne rejettera pas la lumiere qui vient le frapper, pour chercher cette liaiſon par des détours qui en rendroient la connoiſſance plus pénible, & moins claire. L'eſprit ne prend cette peine que pour ſuppléer à cette idée moyenne qui lui épargneroit tous ces embarras, & le conduiroit plus directement au but qu'il ſe propoſe. Je pourrois éclaircir cette penſée par l'exemple des différentes démonſtrations que différents Auteurs ont données de certaines propoſitions de géométrie, dont les uns vont directement au but par une, ou deux idées moyennes adroitement ménagées, & les autres n'y parviennent que par de longs circuits qui rendent la démonſtration moins claire, & plus fatiguante.

L'ordre le plus avantageux eſt donc celui qui renferme le *maximum* des moyens avec le *minimum* des termes. C'eſt par le moyen d'un tel ordre qu'on obtiendra la fin qu'on ſe propoſe le plus *facilement*, le plus *ſûrement*, & le plus *pleinement* qu'il eſt poſſible. Un tel ordre eſt le plus conforme à l'intelligence la plus éclairée dont la perfection conſiſte à ſaiſir les rapports qui lient le plus immédiatement les différentes idées. Il a donc en ſoi une raiſon de préférence ſur tout autre ordre, & il eſt en conſéquence l'ordre le plus parfait en ce genre.

L'ordre qui réſulte de l'arrangement, ou de la combinaiſon des moyens relatifs à une fin donnée, peut encore ſe combiner avec l'ordre de ſymmétrie dont nous avons parlé ci-deſſus.

Dans toute combinaiſon de moyens il y a une piece qu'on peut regarder comme la principale, & dont l'action doit régler le jeu de toutes les autres ; ou, pour enviſager la choſe d'une vue plus générale, il y a dans toute combinaiſon de moyens, comme un centre où tous les efforts de toutes les différentes pieces vont ſe réunir. Les moyens, ou termes peuvent donc être tellement diſpoſés relativement à ce point, que leur poſition forme une correſpondance de ſymmétrie, telle qu'on la découvre dans un arrangement où la poſition de deux termes ſemblables eſt déterminée par leur correſpondance avec le terme diſſemblable qui eſt entre-deux.

Dans une ſuite ordonnée indéfinie les termes s'éloignent de plus en plus les uns des autres ; mais l'ordre qui réſulte de l'arrangement d'un certain nombre de moyens relativement à une fin donnée exige que les termes ſe rapprochent pour agir de concert. La meilleure maniere de les rapprocher étant bien connue détermineroit peut-être une correſpondance de ſymmétrie dans la poſition des termes qui, en qualité de moyens, doivent concourir le plus avantageuſement à la fin donnée. Du moins nous en voyons des modeles dans l'organiſation des plantes, & des animaux.

Cette correſpondance de ſymmétrie, en liant les parties par des rapports plus marqués, en forme un tout plus régulier, j'oſerois preſque dire, plus identique, & dont l'eſprit ſaiſit l'enſemble avec plus de facilité. Peut-être, eſt ce-là le fondement du Rythme poëtique, & de la cadence oratoire. La penſée la mieux conçue eſt celle qui préſente avec plus de force, & de clarté l'enſemble des idées qui

la compoſent. Il faut donc qu' il y ait le plus parfait accord poſſible entre ces idées ; & cet accord marqué par les expreſſions qui doivent frapper l'oreille formera un nombre, un rythme, une conſonance, d'où reſultera l'harmonie.

On ne doit pas être ſurpris de remarquer une ſi grande diverſité de jugements dans l'application que font les hommes de l' idée de l'ordre aux différents objets qui ſe préſentent à leur conſidération. Cette diverſité vient de pluſieurs cauſes 1° Du défaut de connoiſſance. Préſentez le rouage de la machine la plus ingénieuſe à un ſauvage ignorant, il ne verra qu'un amas confus de pieces dans un aſſemblage qui fera l'admiration d'un artiſte. C'eſt que le ſauvage, ne connoiſſant pas la raiſon déterminante de la poſition des pieces qui compoſent la machine, elles ne réveillent aucune idée d'ordre dans ſon eſprit. Une oreille groſſiere eſt peu touchée de la muſique la plus harmonieuſe. Le *ſenſorium* faute de délicateſſe, ou d' habitude ne diſtingue point aſſez les tons qui ſe ſuccedent, & ne peut par conſéquent ſaiſir le rapport qui les réunit pour en former un accord.

2° Delà ſuit que ſi le nombre des pieces qui entrent dans un accord quelconque eſt trop grand, l' eſprit, ou l'œil peu exercé ne ſaiſira pas tout d'un coup tous les rapports de ces différentes pieces; cet aſſemblage paroîtra donc confus, juſqu' à ce que l'eſprit ayant acquis peu à peu la connoiſſance de ces différents rapports parvienne enfin au point d'en ſaiſir l'enſemble & de ſe repréſenter d'un ſeul coup d'œil l'ordre qui regne dans tout l'aſſemblage.

3° Dans les choſes qui ſont ſuſceptibles de différents arrangements il y a ſansdoute un ordre préférable à tout autre ordre. C'eſt toujours le plus ſimple, & celui néanmoins, qui ſuppoſe le plus d' intelligence. Une bibliothéque préſente des livres arrangés ſuivant une certaine méthode

thode. Cet arrangement applaudi par les uns ſera blâmé par un homme plus intelligent qui aura en vue un ordre plus convenable. Ce n'eſt pas que la premiere diſpoſition ſoit blâmable comme abſolument mauvaiſe en elle-même ; car tout homme conviendra qu'elle eſt toujours préférable à un tas confus de livres qui ſeroient amoncelés au hazard l'un ſur l'autre. Ce blâme n'eſt donc que relatif, c'eſt-à-dire qu'on blâme l'arrangement actuel d'une bibliothéque en tant qu'excluſif d'un ordre plus convenable qu'on auroit pu lui donner. Et par un abus commun du langage on donne le nom de mauvais à ce qui n'eſt réellement que moins bon.

L'ordre eſt le fondement du beau ; mais le beau dans ſa ſignification ordinaire ajoute à l'idée d'un ordre quelconque, celle d'une perfection, & d'un agrément particulier qui donne un plaiſir mêlé de ſurpriſe, & d'admiration. Delà vient qu'il eſt difficile de fixer dans l'échelle de l'ordre le dégré où doit commencer la dénomination du *beau*. Ce dégré devant être celui où la régularité de l'objet commence à exciter un mouvement de plaiſir mêlé d'une ſorte d'admiration, il eſt aiſé de ſentir, que ce dégré doit être différent relativement aux différents dégrés d'intelligence, aux différentes diſpoſitions, & même aux différentes habitudes de ceux qui en ſont affectés. L'idée du beau eſt une idée complexe du genre de celles que Loke appelle des modes mixtes, qui renferme une idée de régularité dans l'objet, & une idée de plaiſir, & d'admiration cauſée par la vue, ou la perception de cet objet.

La dénomination du beau dans le langage vulgaire ſera donc ſujette aux mêmes abus, & aux mêmes inconvénients que toutes les autres dénominations des modes mixtes ; abus ſur leſquels Loke inſiſte beaucoup dans ſon Eſſai ſur l'entendement humain. Si un objet paroit revêtu d'une

qualité brillante qui cauſe de la ſurpriſe & du plaiſir, on le nommera *beau*, quoique toute la régularité de l'ordre ne s'y rencontre pas. Au contraire, ſi à la régularité d'un objet ſe trouve jointe une qualité qui bleſſe, & qui étouffe le ſentiment de plaiſir que la ſeule régularité ſeroit capable de réveiller, cette régularité ſeule ne ſuffira pas pour qu'on lui donne le titre de *beau*.

La variété du langage, & des opinions au ſujet du beau, ne prouve donc point qu'il n'y ait rien de réel dans l'idée du beau, & qu'elle ne ſoit qu'un effet capricieux, un phantôme du préjugé, & de l'éducation; il eſt conſtant qu'il y a un ordre réſultant du rapport des choſes, & par conſéquent fondé en nature: que l'ordre eſt un objet de l'intelligence, & de la raiſon: que l'ordre connu eſt propre à exciter un ſentiment d'approbation, & de complaiſance: que dans les différents ordres, ou arrangements qui réſultent de différentes combinaiſons, il y en a de plus parfaits les uns que les autres: que dans cette échelle de l'ordre il y a un dégré où l'ordre connu excite un ſentiment de plaiſir mêlé de ſurpriſe, & d'admiration: que ce dégré doit être différent relativement aux différentes diſpoſitions de ceux qui en ſont affectés. Ces principes ſuffiſent pour déterminer ce qu'il y a de réel, & de conſtant dans la dénomination du beau, & pour démêler en même tems le cauſes des différentes applications que l'on en fait aux différents objets.

EXAMEN PHYSICO=CHIMIQUE

Sur la couleur des fleurs, & de quelques autres ſubſtances végétales.

PAR M.r LE COMTE MOUROUX.

PREMIÈRE PARTIE.

Si l'étude de la nature a augmenté le nombre des connoiſſances humaines, ſi elle a diſſipé une foule d'erreurs, & déchiré le voile de la préſomption, & de l'ignorance, nous en devons la principale obligation aux progrès, que les Mathématiques ont fait dans nôtre ſiécle : la préciſion, & l'ordre qu'elles inſpirent ayant paſſé dans les autres ſciences naturelles, elles ont fait naître cet eſprit méthodique par lequel on examine un Phénoméne, un fait d'une manière ſimple, & naturelle, & l'analiſe qui en réſulte eſt toujours claire, & conſtamment enchaînée aux loix invariables de la méchanique, & de la phiſique: ainſi nos obſervations combinées deviennent une ſource preſque inépuiſable de principes vrais, & féconds.

La chimie qu'on peut regarder aujourd'hui comme une des branches les mieux cultivées de la phiſique y a répandu un grand jour, & la facilité, qu'elle donne à décompoſer les corps, & à les récompoſer nous fournit journellement des applications utiles pour les arts, & métiers, & nous ne négligerons pas d'obſerver qu'on arrive par ſon moyen à imiter parfaitement bien des productions naturelles, telles que le cinnabre, les ſafrans, le verd-de-gris, le touffre, les ſels, les ochres, les chaux métalliques, & nombre d'autres, qu'on pourroit apporter pour preuve, & qui nous démontrent que la nature, quoique très-ſou-

vent impénétrable à nos yeux, agit cependant toujours d'une manière ſimple, & par des loix univerſelles.

Cela poſé ne doit-on pas croire autant de ſimplicité, & de généralité dans les loix, ſuivant leſquelles ſe fait la végétation, & ſe produiſent les couleurs dans les fleurs, & dans les fruits? Pluſieurs Auteurs célébres nous ont enſeigné par quelle mécanique s'opéroit l'accroiſſement des plantes, & ont cherché à dévélopper d'une manière ſiſtématique leur génération; Ce n'eſt qu'en paſſant, & d'une manière aſſez imparfaite, que quelqu'un d'entr'eux a parlé des couleurs des végétaux, & quoique cet objet ne paroiſſe que de ſimple curioſité, j'eſpére néanmoins, que mes recherches pourront réunir l'agréable à l'utile; C'eſt du moins le but, que je me propoſe.

On ne doit pas s'attendre à un ordre bien rigoureux dans une matière ſi vaſte, & je ne donnerai mes obſervations, que dans l'ordre, ou pour ainſi dire elles ſont nées, & c'eſt à la conſidération attentive, que je fis ſur la vivacité de la couleur d'une fleur, que je me déterminai à en chercher la cauſe, de même qu'à m'aſſurer, ſi ces couleurs ſont inhérentes ou accidentelles.

Les Botaniſtes s'accordent à donner le nom de fleur à cette partie de la plante, qui ſe diſtingue ordinairement des autres par des couleurs particulières, & qui eſt deſtinée à garder les organes de la génération; tel eſt le ſentiment de Vaillant, Ray, Juſſieu, Tournefort, & enfin de la plus grande partie des Botaniſtes, mais ils ne ſont pas allés plus loin dans leur recherches ſur ce qui a rapport à la couleur.

Géofroi entre un peu plus en matière, & prétend que les huiles eſſentielles des plantes pendant qu'elles ſon renfermées dans les fleurs peuvent leur procurer différens mélanges par cette variété de couleurs, qu'elles poſſédent;

(1) il appuye enſuite ſon ſentiment ſur ce qu'une ſeule, & même huile, ſavoir celle du Thim combinée avec différens mélanges d'eſprits acides, volatils, urineux &c., lui a donné toutes les nuances des couleurs depuis le blanc juſqu'au noir; mais la renoncule, le cianum, ou bleuet, la gonfrena globoſa, qui ne contiennent certainement pas d'huile eſſentielle, & auxquelles on ne ſauroit rien déſirer pour l'éclat, & la vivacité de la couleur paroiſſent faire une grande exception à la généralité de ce ſentiment.

Le célébre Halles fut le premier à éclairer la partie de la phiſique qui regarde la végétation, mais occupé ſurtout à démontrer, que l'air eſt néceſſaire pour l'accroiſſement des plantes, & à en meſurer la force en repétant les expériences du célébre Boyle, il n'a pas examiné la partie, qui concerne la couleur des fleurs: il dit cependant (2) au chapitre ſeptième de ſa ſtatique. „ Comme le gout „ exquis des fruits, & l'odeur agréable des fleurs viennent „ des principes aëriens ſubtiliſés, il eſt aſſez naturel de „ penſer que les belles couleurs de ces mêmes fleurs doi- „ vent auſſi être attribuées à la même cauſe; car on ſçait „ d'ailleurs, que le terrein ſec favoriſe plus le jeu, & „ contribue plus à la variété de leurs couleurs, que les „ terreins humides, d'où elles tireroient plus de nouriture „ aqueuſe; mais je demande p.° que l'on m'explique quels ſont ces principes aëriens ſubtiliſés, en ſecond lieu que l'on me donne raiſon des fleurs très-bien colorées qui croiſſent dans l'eau; il dit enſuite que les plantes méridionales contiennent une plus grande partie de principes ſubtils aromatiques que les ſeptentrionales, parceque celles-là tirent ſansdoute plus de roſée, que celles-ci, choſe, qu'il ne prouve non plus que la première.

(1) Mémoires de l'Accadémie des Sciences de Paris an. 1707.
(2) Halles ſtatique de Végétaux cap. 7 p. 277.

L' illuſtre Duhamel (3) qui par ſes travaux a beaucoup répandu de lumière ſur le mécaniſme de la végétation n'a non plus que les autres recherché la cauſe de la variété, & des nuances des couleurs des fleurs ; il en a d'ailleurs obſervé très-attentivement la ſtructure ; il parle à la vérité des plantes moins colorées, & malades, que l'on nomme étiolées, dont je parlerai plus bas.

Becher (4) & Sthal (5) ont penſé, que la couleur verte des plantes fût produite par le fer, puiſque l'on ſçait, que des cendres des plantes l'on a retiré du fer, comme Lemery l'a demontré. (6) Becher a même penſé, que le verd étoit la deviſe du regne végétal, ou la caractériſtique, comme il la demande ; car quoique cette couleur diſparoiſſe pendant la deſſication, & la combuſtion des végétaux, elle ne laiſſe cependant pas de reparoître après la vitrification, & c'eſt pour cette raiſon, que le verre végétal pour le nommer ſelon Becher n'eſt pas beaucoup propre à être employé lorſqu' il eſt tout pur tenant beaucoup du verdâtre, outre qu' il ſe décompoſeroit fort aiſément, contenant une trop grande quantité d'alkali déliqueſcent. Ces illuſtres Auteurs cependant ne ſont pas entrés dans le détail de la culture des fleurs.

L' immortel Henchel, que j'aurai lieu de citer avec admiration, par ſes illuſtres découvertes ſur l'analogie du régne végétal avec le minéral, s'eſt cependant laiſſé entraîner à douter par rapport à la couleur verte des plantes, il me paroit qu' il étoit plutôt porté à l'attribuer au cuivre, voici ſes termes. (7) „ Ne pourroit-on point à la vüe

(3) Phiſique des arbres.
(4) Phiſica ſubterranea.
(5) *Sthalii fundamenta chymiae dogmatico-rationalis &c. Tom. II.*
(6) Mémoires de l'Accadémie des Sciences de Paris au 13 novembre 1706 p. 411.
(7) Henchel flora ſaturniſans chap. 11 p. 214.

„ de ce verd, qui eſt fixe au feu inférer, que cette cou-
„ leur tire ſon origine d'un mixte minéral, & que le
„ cuivre a de l'affinité avec le régne végétal? (8).

Au reſte la manière vague, dont il s'exprime, fait aſſez connoître qu'il n'eſt pas bien décidé, car il admet d'avoir retiré lui même du fer des cendres des végétaux, & il avoüe, que perſonne n'eſt jamais parvenue à en retirer du cuivre.

Il ne paroit guère plus décidé ſur la nature de ces couleurs, ſavoir ſi elles ſont accidentelles, ou fixes, & inhérentes. Voici ce qu'il en dit en des endroits différens pag. 214. chap. 11. „ Il eſt conſtant que des couleurs
„ fixes de cette nature ne ſont point accidentelles, com-
„ me celles qui ſont produites par la reflexion, & refra-
„ ction, mais elles ſont ſi réelles, & ſi eſſentielles, qu'el-
„ les conſtituent, ou du moins contribuent à conſtituer
„ les corps.

„ Les couleurs dit-il, (pag. 256 chap. 15) des corps na-
„ turels ont une propriété, que nous ne pouvons venir
„ à bout de connoître par le moyen de nos yeux, il faut
„ donc que cette qualité ſoit quelque choſe de bien par-
„ ticulier, puiſque elle fait l'objet le plus eſſentiel de
„ nos ſens; en effet il faut qu'il y ait réellement des
„ cauſes, & des circonſtances bien délicates, qui faſſent
„ que certaines fleurs ont différentes couleurs, que la cou-
„ leur ordinaire de quelques autres change, & qu'elle peut
„ même être changée artificiellement.

„ Qu'on me diſe maintenant, que la couleur eſt un
„ caractère eſſentiel dans les plantes, puiſque ce caractère

(8) Nous obſerverons cependant, que cet argument n'eſt pas excluſif, car le vitriol martial, dont la couleur eſt verte n'eſt cependant autre choſe, que le réſultat de la combinaiſon de l'acide vitriolique avec le fer.

„ eſt ſujet à tant de variations. Mais quand il ſeroit fixe,
„ qu'on m'apprenne quelle en eſt la ſource, quels moyens
„ nous avons pour la découvrir ; en un mot les couleurs
„ ſeront produites ſans que nous ſachions comment elles
„ varient, & ſe perdent ; comment pouvons nous com-
„ pter ſur elles, comment pouvons nous comparer la
„ couleur fugitive de la celidoine avec la couleur fixe de
„ l'or?

Après avoir ainſi expoſé ce qui a été dit, & fait par ces illuſtres Savans ſur les fleurs, & ſur leurs couleurs, & après avoir donné la définition généralement adoptée ſur ce qu'ils entendent par fleur, nous allons paſſer à une conſidération préliminaire, qui dépend de l'Analiſe chimique, qui en a été faite.

L'Analiſe des végétaux ſelon Halles ſe réduit à cinq principes, qui ſont

Le ſouffre,
Le ſel volatil,
L'eau,
La terre,
Et l'air.

Dans cette Analiſe tous les élémens de la nature ſont en jeu, de façon, que ceci ne nous éclaire pas beaucoup ; je trouve plus ſenſé ce qu'en dit M. Rouelle, ſavoir,

Que la partie colorante verte des plantes eſt d'une nature réſineuſe, puiſque elle ne ſe laiſſe extraire que par l'eſprit de vin, mais, que la partie colorante de leurs fleurs eſt *extracto réſineuſe* étant également ſoluble dans l'eau, & dans l'eſprit de vin ; il eſt vrai cependant que ce dernier les altére à raiſon de l'acide qui entre dans ſa combinaiſon ; il y a d'autres parties colorantes qui ne ſont ſolubles, que dans l'eau, & qui par conſéquent ſont purement extractives, telle eſt la partie colorante de la terra merita, ou de la racine de curcuma ; l'art. de la

teinture

teinture consiste à enlever cette partie colorante au moyen d'un acide, ou d'un alkali, & de le précipiter ensuite avec un alkali, ou un acide; il a reconnu neuf principes dans les végétaux, que je laisserai de décrire, parceque il avouoit lui même qu'on pouvoit encore en reconnoître d'autres.

La plus part de ceux, qui ont examiné les végétaux se sont contentés de parler des huiles essentielles, des sels, comme des principes plus connus; il est certain cependant, que l'on reconnoit dans les plantes différens mixtes de même que dans les fleurs. Nous en avons un exemple dans la fleur du grand soleil, appellée *corona solis*, qui fournit une grande quantité de nitre outre une partie d'alkali fixe; l'on retire du vin le sel de tartre; de certaines plantes, & fleurs un alkali volatil comme dans les cruciféres, l'on retire des esprits de certaines autres; l'on a retiré du fer des cendres de quantité de plantes, & surtout du chéne; du génet l'on en a retiré de l'étain, & si nous en croyons les Chinois l'on a retiré du mercure du pourpier sauvage. (9)

Enfin ces principes ne sont pas encore bien analisés, car l'on parvient à reconnoître différens principes selon la manière qu'on traite les végétaux que l'on analise, comme il est aisé de le voir dans les cendres des plantes obtenues, ou à l'air libre, ou à la façon de Takenius, dont les unes nous donnent un alkali fixe déliquescent, & les autres des sels fixes.

L'on doit cependant remarquer, que le principe colorant a beaucoup d'affinité avec les sels; l'expérience que fit Boherave nous le démontre, puisque ayant fait bouillir

(9) Lettres édifiantes récueil 22 lettre du Père Dentrecolles p. 457, & suivan.

une branche de romarin vingt fois, & plus, il ne lui reſta plus aucune couleur, & ayant enſuite brulé cette même branche, il n'en retira plus aucun ſel.

Je fis la même expérience ſur différentes fleurs, qui après avoir bouilli quantité de fois, ne reſterent plus aucunement colorées, & je n'obtins aucun ſel de leurs cendres.

Nous avons une autre preuve de l'affinité de la partie colorante avec les ſels dans la méthode, dont on ſe ſert pour retirer la laque des végétaux, qui ſe fait au moyen d'une forte leſſive de ſel de potaſſe, & de chaux, & par ce moyen la couleur des fleurs eſt entièrement enlevée par les ſels.

Si l'air eſt néceſſaire pour l'accroiſſement des plantes, il l'eſt de même pour les fleurs, puiſque l'on voit, que lorſqu'on expoſe des fleurs fraiches ſous la pompe pneumatique elles ſe fanent, & perdent en partie leurs couleurs naturelles; Boile la croit auſſi néceſſaire pour développer la couleur.

Quant à la terre nous ſavons qu'elle contribue autant à la végétation que l'eau, qui attenuant les ſels, & les parties les plus ſubtiles de la terre ſont portées dans les vaiſſeaux capillaires des plantes par l'action de l'air, & que la terre qui eſt plus ou moins chargée de ſels contribue à l'accroiſſement de la plante plus ou moins rapide.

Le Phlogiſtique eſt ſurément une des parties les plus eſſentielles des plantes, & il l'eſt de même des ſubſtances métalliques. Henchel en fait une de ſes plus fortes preuves pour l'analogie qu'il a démontrée entre les végétaux, & les minéraux; que ſi dans le régne minéral il donne le dernier dégré de perfection (10) aux terres métalliques, pourquoi ne donneroit-il pas la perfection auſſi aux plantes,

(10) Henchel flora ſaturniſans pag. 196.

& aux fleurs. Baumé eſt d'après Stahl (*) de ſentiment, que le phlogiſtique ſoit le principe des odeurs, & des couleurs. (11)

M. Pott ne fait aucune diſtinction dans ſa lithogeognoſie entre le phlogiſtique, & la couleur, bien ſouvent il les prend pour ſynonimes, comme parlant ſur la terre gypſeuſe, il dit qu'elle contient auſſi un peu de phlogiſtique, ou principe colorant (12), quelque fois il la nomme matière ſulfureuſe, ou colorante, beaucoup volatile.

M. le Comte Saluces penſe de même que le phlogiſtique eſt abſolument néceſſaire pour développer la couleur des parties qui la contiennent, comme il le prouve par un grand nombre d'expériences qu' il a fait à ce ſujet.

Si M. Pott nous a enſeigné une manière ſure d' analiſer les corps les plus durs, tels que les métaux, & les pierres par le moyen d'un feu violent, qui en les décompoſant nous en montre les principes; il eſt choſe très-ſure que l'on ne doit non plus s' écarter de cette méthode pour parvenir à connoître les vrais principes dans les fleurs; c'eſt à l'aide de ce menſtrue, que je ſuis venu à bout de reconnoître le principe qui conſtitue la couleur; perſonne je crois avant moi ne s' eſt ſervi de cette méthode pour les fleurs, comme il eſt aiſé de voir dans la 2e partie (13). Je commencerai en attendant par rapporter un nombre d' obſervations, qui me laiſſoient ſoupçonner que la lumière pût contribuer à la couleur des fleurs.

(*) OEdipus Chym. pag. 97 & ſuiv.
(11) Manuel de chimie pag. 47.
(12) Lithogeognoſie tom. 1 p. 66.
(13) Le même M. Pott ne croyoit pas, que ces couleurs végétales fuſſent dans le cas de ſoutenir un feu violent, car dans l'analiſe, qu' il fait de la terre colorée que on apelle de Scuttgelb il dit qu'elle n'eſt point minérale & qu'elle n'eſt qu'une compoſition artificielle, c'eſt-à dire, une eſpéce d'argille que l'on colore avec la décoction de l'écorce de bouleau, ou des feuilles de tillieul &c. „ l'examen de ces couleurs par „ le feu nous fait voir ce que je viens de dire, car en les calcinant „ on leur fait perdre cette couleur, qui eſt végétale. (Lithogeognoſie Tom. II. pag. 68.)

OBSERVATIONS.

I

Si l'on conſidére les fleurs à calice, lorsqu'elles ſont prêtes à éclore, ordinairement l'on n' y voit du premier moment que du blanc, elles commencent à prendre de la couleur lorſqu'elles s'ouvrent juſqu'à ce que écloſes à leur point de perfection, elles aquierent le plus grand dégré de couleur, cependant les pérales qui ſont immédiatement couverts par le calice reſtent preſque entièrement ſans couleur pendant le tems qu' ils ſont couverts, ſur tout ſi le calice eſt d' une texture forte, comme on a lieu plus particulièrement d'obſerver dans les œillets; c' en eſt de même preſque de toutes les autres eſpéces de fleurs, qui n'ont point de calice, les parties qui ſont à l'abri de la lumière ſont les dernières à ſe colorer, & ne prennent que très-peu de couleur ſi elles ne parviennent à la voir.

II

Si l'on examine la plus grande partie des fleurs colorées, qui ont quantité de pétales (celles qu'on nomme doubles) quoique dans leur point de perfection, ou de vivacité de couleur, on trouve en enlevant les petales les uns après les autres, que ceux qui ſont tout-à-fait couverts ſont toujours d'une nuance plus tendre.

III

L'onguis, ou la partie qui eſt immédiatement attachée au calice eſt tout-à-fait blanche, ou un peu verdâtre, cette différence ſe montre évidemment dans l'artichaut, & ſi l'on remarque quelque couleur plus foncée à la baſe du

pétale, elle eſt ordinairement due aux nectaires, dont les glandes ſéparent une humeur ſingulière, qui probablement a reçu ſa concoction ailleurs; on peut de même obſerver les différentes nuances dans le verd, ſelon que les parties ſont plus ou moins couvertes; la plus grande partie des feuilles des arbres, des arbuſtes, des plantes, & des herbes nous montrent leur face expoſée au ſoleil d'une couleur plus foncée, que le revers, qui eſt au contraire d'un verd plus tendre, (14) & on obſerve aſſez généralement auſſi, que les plantes, dont les feuilles ont une ſeule face tomenteuſe, ou blanchâtre, cette face eſt preſque toujours l'intérieure, ou la moins expoſée aux rayons du ſoleil.

IV

Il en eſt de même de la plus grande partie des fruits, car la partie qui eſt couverte reſte preſque ſans couleur, & au contraire celle qui ne l'eſt pas, eſt merveilleuſement colorée; ſi ces fruits jouiſſent au ſurplus de la vue immédiate du ſoleil, la face expoſée au midi eſt ſurément plus colorée que celle au Nord, qui ne l'eſt preſque point, ce qu'il eſt très-aiſé de voir dans preſque tous le fruits, & plus particulièrement dans les péches.

V

J'obſerve enſuite, que ſi on coupe tous les noyaux des fruits, les amandes, les pignols, la noix, la noiſette, tous les pepins des poires, des pommes, & des autres

(14) Cette différence de couleur dans les revers des feüilles ne s'apperçoit pas encore toujours dans le mois d'avril, mais elle commence à être ſenſible à la fin de mai, lorſque le ſoleil commence à avoir plus de force, & cette différence s'obſerve encore plus tard dans les montagnes.

fruits on les trouve blancs de même que les graines de mélons, de courges, de concombres, qui donnent des émulsions très-blanches. Enfin les semences, & les graines dans la partie intérieure se manifestent blanches, comme le bled, l'orge, le riz en fourniſſent encore une preuve : & comme l'on a toute la raiſon de croire, que dans cette partie blanche des semences toute la plante y soit en petit pour se former ensuite, & devenir une plante complette, ne pourroit-on pas soupçonner avec raiſon qu'originairement la couleur blanche est propre à l'embrion, ou à l'enfance de toutes ces plantes, & que si elles aquierent avec le tems d'autres couleurs, cela est du à d'autres causes extérieures, que je tâcherai d'éclaircir, & que je me permets en attendant d'attribuer aux rayons du soleil; en continuant ici ces reflexions, j'observe, que la partie interne des plantes est assez généralement plus blanche, que ne le sont les parties extérieures.

V I

Les parties de la peau de quantité d'animaux, qui sont les plus couvertes, comme sous le ventre, dans les entrecuisses sont d'une couleur moins foncée, que sur le dos, quelque fois même blanches, comme on obserue dans quantité de vaches noires, dans presque toute la famille des cerfs, des dains, des chévres sauvages, dans les castors, les renards, & dans les petits gris &c. Il en est de même des oiseaux, comme dans l'Airon, la Bertavelle, l'Hirondelle, la Pie, les Tourterelles &c., le plumet sous le ventre est toujours moins coloré, que celui du dos, & bien souvent blanc.

La plus part des poiſſons offrent un pareil exemple, comme l'on peut voir dans le ton, le spada, le hareng, le merlan &c., & dans la plus grande partie des rayes,

dans les poiſſons de mer, de même que dans la truite, dans le brochet, & dans quantité d'autres poiſſons d'eau douce.

L'on voit à peu-près la même choſe dans la vipére, dans quelques ſerpens, & dans les lezards.

L'examen des coquillages ſur-tout de ceux de la mer des Indes nous offrent un fait ſemblable.

La partie interne des coquilles à valves ſont preſque toujours d'un blanc émaillé, comme il eſt aiſé de le voir dans les huitres, dans les petoncles, dans les couteaux, & dans les pinnes &c.

VII

Le celeri, la chicorée, le chardon nous préſentent un fait ſingulier, ces plantes vertes de leur nature, ſi on leur défend la lumiére en les couvrant avec la terre deviennent blanches, & l'on a donné différentes explications de ce phénoméne. Nollet (15) & Schaw (16) prétendent, que c'eſt la privation de l'air, qui ôte le verd à ces plantes enterrées. La laitue, & le choux nous montrent la même choſe, les feuilles les plus centrales ſont ordinairement blanches, & l'on voit par nuance du centre à la ſurface la couleur verte s'augmenter petit à petit; même ſi l'on obſerve avec attention, ce ſont les pointes des feuilles qui commencent à prendre de la couleur.

VIII.

L'obſervation des plantes, que l'on nomme étiolées paroit appuyer ces reflexions. Ces plantes ſont attaquées d'une

(15) Leçons de phyſique tom. 5 pag. 441.
(16) Schaw. leçons de chimie.

maladie ſingulière, qui reſſemble beaucoup à celle que dans les hommes on nomme *rachitis*, ſelon Du-Hamel les branches de ces plantes s' allongent, la tige eſt petite, & ſans proportion, les feuilles petites, au lieu de la couleur verte, elles ſont plutôt jaunâtres. Si c'eſt un arbre fruitier, qui eſt attaqué de cette maladie, il porte les fruits à la vérité, mais fort petits preſque point colorés, qui ne parviennent jamais à maturité, faute de quelque choſe néceſſaire à ſon accroiſſement; l'on obſerve des plantes de cette nature dans des petites cours entourées de bâtimens fort hauts, & ſur tout ſi les dites plantes ſe trouvent expoſées au Nord. L'on obſerve la même choſe dans les herbes, qui croiſſent ſous quelque pierre, ou tuile très-peu élevées, ou dans les terres très-peu expoſées au ſoleil.

On a porté pour raiſon de ce phénoméne entre autres Du-Hamel (17) que la reſpiration de l'air étant génée, la plante ne peut avoir toute ſa nourriture, faute du mouvement que l'air y donne.

Je penſe qu'on pourroit auſſi en attribuer en partie la raiſon à ce que le ſoleil ne la viſite jamais, & delà il eſt clair, comment la couleur des différentes plantes varie ſelon le climat, & en preuve de cela il ſuffit de voir, que les plus célébres Botaniſtes conviennent avec M. Linneus que par des obſervations ſuivies faites ſur les lieux on parvient à diſtinguer par le port, & la couleur, p. ex. les plantes du Cap de bonne eſpérance, & des autres pays méridionaux des autres plantes Européenes; d'où il ſuit que le ſentiment de ces Botaniſtes, qui penſent, qu'il n'y ait pas dans la nature une telle multiplicité de véritables eſpéces de plantes, que l'on s' imagineroit d'abord, n' eſt point ſans appui, ſi on refléchit ſeulement à la variété des cou-

(17) Duhamel phiſique des arbres.

couleurs, dont une grande partie eſt due à la variété du climat, & à l'endroit plus ou moins exoſé au ſoleil, & que pour cette raiſon la même plante, par exemple, de laitue devient rouge cultivée en plein jour en Sicile, & qu'elle perd ſa couleur étant cultivée dans nos jardins, de même que pluſieurs autres eſpéces de plantes, qui par ces ſeules variations deviennent méconnoiſſables aux Botaniſtes plus éclairés.

Malgré toute la variété qui s'offre dans les couleurs des plantes relativement aux différens climats, on ne laiſſe cependant pas d'obſerver une certaine conſtance dans ces couleurs, & par là on conçoit, que ce n'eſt pas ſans raiſon, que le célébre M. Adanſon a établi ſon neuvième ſiſtème des plantes fondé ſur les couleurs.

Cette différence de couleurs relativement au climat, n'a pas lieu ſeulement dans le régne végétal; nous la voyons de même dans le regne animal, puiſque dans les pays où il fait extrêmment froid, comme en Moſcovie, en Pologne, les ours, les loups, & les renards, qui en hiver ſont blancs, ſont rouges en été, de même que les lièvres, qui dans nos hautes montagnes ſont colorez en été, ſont blancs en hiver, Monſieur de Buffon obſerve que les oiſeaux qui ont les plus vives couleurs dans leur plumage viennent dans les pays chauds. (18) Nous voyons cette différence auſſi dans quelques poiſſons, entre autres, au rapport de Rondelet (19), la Mendola, & le Picarel, qui en hiver ſont blancs, en été deviennent noirs, ou plutôt bigarés.

IX

Quant aux hommes, nous obſervons en général, que tous les negres, les olivâtres, les baſanés, les cuivreux ſe trou-

(18) Hiſtoire naturelle des Oiſeaux diſcours préliminaire p. 22 edit. in 4.
(19) Hiſtoire entière des Poiſſons pag. 34 & 134.

vent dans les pays chauds, que jamais l'on en a trouvé dans les pays froids, même nous ſavons que les Negres depayſés, & dans les climats froids blanchiſſent dans quelques années, & les Européens bruniſſent dans leurs climats chauds, mais je me contenterai de rapporter encore ici une obſervation qui tient toujours à l'action du ſoleil, & de la lumière ſans entrer à diſcuter les opinions des Savans ſur ce qui fait la couleur des Negres, & c'eſt que ces hommes ont la plante des pieds auſſi blanche, que les Européens. (20)

Toutes ces obſervations combinées me portoient toujours plus à croire, que la lumière du ſoleil influë beaucoup ſur les couleurs des corps naturels, & particuliérement des végétaux, des fleurs, des fruits, & même des animaux; je cherchai par conſéquent de m'en aſſurer par des expériences.

Or le ſoleil peut agir de deux manières différentes en ſuppoſant les couleurs attachés à ce principe. 1.° comme fait le feu ſur les couleurs de la porcelaine, qui ne ſont que très-laides quand on les peint, mais qui aquierent le plus grand éclat lorſque le feu vitrifiant ces matières en développe la couleur; de même le ſoleil développant les principes analogues dans les fleurs, les reduiroit à cette beauté, qui fait l'ornément de nos jardins.

2° De voir s'il agit ſimplement comme lumière en introduiſant dans les parties des fleurs des principes colorants ſelon la diſpoſition des mêmes plantes à refléchir certaines parties de la lumière plutôt que des autres, & rapportant cela aux affinités des parties de la lumière avec les parties des corps en queſtion, effet ſemblable à celui que la

(20) Vojez l'Abbé Manet Hiſtoire de l'Affrique Françoiſe, & l'appendix des Mémoires de l'Academie Royale de Pruſſe Tom. II, art. VIII. p. 15.

lumière opére ſur le phoſphore de Bologne (21), ſur lequel l'on ſçait que le feu n'y a aucune action.

Il ne ſera pas au reſte inutile d'obſerver d'avance, que par l'analiſe on découvre, que les fleurs contiennent toute ſorte de ſels, & de parties terreſtres; c'eſt à ces deux principes que je m'arrête en tant que généraux, & je laiſſerai à part les autres que l'on ne peut pas regarder comme colorants; mais venons aux expériences.

Expérience premiére.

J'ai pris une forte tige de violier rouge, qui étoit plus foncée dans quelques endroits, & qui avoit des petites tâches auſſi de rouge foncé, & lorſqu'elle eut à peine formé les petits boutons, j'ai mis le pôt dans un endroit très-obſcur d'une chambre que j'avois préparée pour cela; j'ai eu ſoin de laiſſer prendre de l'air pendant la nuit à la plante, & je ne l'ai arroſée qu'une fois, le terrein s'étant maintenu aſſez frais; cette plante a beaucoup tardé à donner des fleurs, & je n'ai obſervé lorſqu'elle eſt écloſe preſque aucune couleur dans les pétales, c'eſt-à-dire, elle ne montroit qu'une couleur entre jaune, & verd, cependant on y diſtinguoit les tâches, quoique elles ne fuſſent pas autant foncées que dans celles qui végétoient en plein jour. J'ai cependant remarqué, que la plante avoit beaucoup ſouffert, & que le feuilles étoient fanées, jaunâtres, & qu'il en tomboit quelqu'une, que même de cinq ou ſix pointes boutonées il n'y en eut, que deux qui fuſſent écloſes, la plante mourut dans quelques jours.

D'autres plantes que j'avois auſſi mis dans l'obſcurité, mais qui étoient d'une tige un peu plus foible moururent

(21) *Commentaria Bononienſia tom. 2 p. 20 Bartholomæi Beccari, De quamplurimis phoſforis nunc primum detectis.*

ſans me laiſſer lieu de rien obſerver ; j'ai vu, que par cette méthode l'on pouvoit auſſi ſoupçonner la raiſon des plantes étiolées, ou malades, faute d'une libre reſpiration de l'air, & j'ai eu recours à l'expérience ſuivante.

Expérience ſeconde.

Entre pluſieurs plantes des mêmes fleurs de l'expérience précédente expoſées en plein air j'ai choiſi une tige aſſez forte, qui avoit déjà les boutons, mais avant qu'ils s'ouvriſſent j'ai couvert la pointe boutonnée d'une cloche de terre verniſée pour lui ôter la vue du ſoleil, la tige, & les feuilles jouiſſoient cependant de toute la lumière, & la reſpiration de la plante n'étoit preſque point génée; j'ai obſervé lorſque la fleur a été écloſe, que les pétales n'étoient que très-peu colorés ſur les bords, & un peu tâchés en rouge, comme j'ai eu lieu d'obſerver dans l'expérience précedente; la plante n'en mourut pas.

Expérience troiſième.

J'ai choiſi une plante de violier cramoiſi foncé, qui a donné quantité de fleurs; je les ai toutes coupées, & il en reſtoit ſeulement 6 à 7 boutons parfaitement fermés, & tout-à-fait verds, j'étois ſur de cette façon de la couleur des fleurs, j'ai fermé cette plante dans une caiſſe de bois couverte de toile cirée pour ôter entiérement la lumière, j'ai pratiqué en divers endroits de la caiſſe des trous, pour y faire circuler l'air : la plante me donna dans dix ou douze jours des fleurs qui étoient pâles tout-à-fait dans les pétales du centre, mais dans l'extérieur elles étoient de couleur de roſe fort tendre, & l'on obſervoit la même choſe dans tous les boutons qui étoient éclos; la tige, & les feuilles vinrent d'un verd plus tendre auſſi.

J'ai tournè enſuite mes vües ſur un fait que tout le monde rapporte, & que la plus part des Auteurs (22) débitent, ſavoir, que la vapeur du ſouffre ôte entiérement la couleur aux fleurs; j'ai voulu examiner la raiſon de ce phénoméne, que j'ai trouvé faux en partie, comme il eſt aiſé de le voir par les expériences ſuivantes.

Expérience quatrième.

Ayant mis du ſouffre dans un creuſet, que j'ai couvert d'un cone de papier, qui portoit à la pointe quattre ou cinq tiges de hyacintes bleues, & ayant allumé le ſouffre, après deux minutes ces fleurs devinrent tout-à-fait blanches, & dèpourvues de couleur, mais les ayant de nouveau expoſées à la vapeur du ſouffre, dix ou douze minutes après les ayant regardées, j'ai reconnu quelques taches rouges ſur la pointe des pétales; je les ai laiſſé encore un bon quart d'heure & les pétales prirent une couleur rouge dans tout le contour de la largeur d'une ligne, & même plus dans quelque endroit. J'ai obſervé préciſément le même phénoméne dans les fleurs nommées *primula veris*, *& hyacintus moſchatus*, qui ſont d'un bleu de Roi très-foncé; elles devinrent blanches dans les premiers momens, enſuite les extrémités ſe colorerent d'un beau rouge, comme dans les hyacintes que j'ai décrit.

Les violettes m'offrirent le même réſultat, ainſi que les fleurs de bleuette, de veronique, l'iris ſilveſtris &c., en deux mots toutes les fleurs bleues, & violettes que j'ai expérimentées me donnerent le même rèſultat.

(22) Henchel, Nollet, Schaw.

Expérience cinquième.

J'ai expoſé de même à la vapeur du ſouffre pendant plus d'une heure de tems des violiers, des narciſſes, & des roſes jaunes, des levions des fleurs de genet & de farfara ſans que leurs couleurs ayent ſoufert la moindre altération, & je ſuis bien aiſe de pouvoir aſſurer les curieux qu'on peut conſerver par ce moyen la couleur aux fleurs jaunes quoique deſſechées par l'acide ſulfureux autant de tems que l'on voudra & avec la même vivacité qu'elles peuvent avoir au moment qu'on les détache de la plante : on me pardonnera j'eſpère cette tranſition en faveur de la nouveaute (23).

Expérience ſixième.

La vapeur du ſouffre fit diſparoitre dans peu de tems la couleur rouge des fleurs dont je m'étois ſervi, telles que les roſes, les tulippes, les pavots, les fleurs de paſſion, les violiers, les œillets, &c. mais elles reprirent après quelque tems leur couleur naturelle, j'oſe même dire avec plus de vivacité vers l'extremité, ou la pointe des pétales de la largeur à peu-près de quatre ou cinq lignes comme s'il leur étoit arrivé une éſpéce de concentration des molecules colorantes vers cette partie. Il eſt bon de remarquer ici, qu'ayant eſſayé deux ou trois pointes de violiers rouges de cette plante qui avoit végété à l'obſcur (expérience troiſième) qui étoient à peine colorées d'un rouge tendre, cependant après avoir été quelque tems à la vapeur du ſouffre, la pointe des pétales ſe colora d'un rouge auſſi vif, que celui des autres fleurs, qui avoient végété en plein jour.

(23) Tranſactions philoſophiques.

Expérience ſeptième.

Ayant expoſé quantité d'eſpéces de feuilles vertes, des tiges, des branches, différentes herbes à la vapeur du ſouffre de la même façon que dans les expériences précédentes, la couleur ne changea jamais, elle s'eſt affoiblie quelque peu dans quelques unes, qui cependant reſterent viſiblement vertes.

Expérience huitième.

Toute eſpéce de fleurs blanches de différentes qualités, que j'ai expoſé à la vapeur du fouffre, ne changérent aucunement, & l'on n'y pouvoit même appercevoir le moindre changement.

Par ce que je viens d'obſerver, je conclus que le ſouffre n'agit ſur les couleurs des végétaux que, comme font les autres acides minéraux, c'eſt-à-dire changeant en rouge le bleu, & le violet des végétaux, altérant un peu la couleur rouge, & n'attaquant pas ni la jaune, ni la verte.

Je dois enfin remarquer qu'en laiſſant expoſées à l'air libre ces fleurs après leur avoir fait ſubir cette tranſmutation, après quelque tems l'on reconnoit de nouveau quelque trace de la couleur primitive. Un fait digne d'obſervation c'eſt qu'ayant eſſayé ſur quantité de plantes odoriférantes les mêmes expériences, la couleur étoit enlévée dans les premiers moments, mais l'on en ſentoit très-diſtinctement l'odeur : de façon que l'on peut conclure, que le principe odoriférant n'eſt pas attaché au colorant, qui doit avoir un autre principe tout particulier ; l'on peut très-aiſément s'en convaincre en faiſant des épreuves ſur les hyacintes, les violettes, & les roſes &c., & toutes les plantes qui ont une odeur aigüe, de même que ſur les fleurs blanches, car quoique celles-ci ne changent point

leur couleur naturelle, l'on ſent très-diſtinctement l'odeur de la fleur.

L'enſemble des expériences me confirmoit toujours plus dans l'opinion que j'avois formée, 1° que l'air eſt d'une néceſſité abſolüe à la végétation :

2° que le ſoleil contribüe au developpement des couleurs (*).

3° Que les fleurs contiennent des parties fixes qui donnent les couleurs, ce qui paroit encore confirmé par l'action de l'acide ſulfureux (pag. 29 & ſuiv.), & qu'on ne doit par les regarder comme un ſimple accident du tiſſû, qui produiſe une réflexion déterminée de la lumière.

4° Que tout bien conſidéré la queſtion de l'inhérence des couleurs peût être regardée comme indiférente & ſuſceptible d'arguments pour & contre, ſuivant la manière de l'enviſager : or nous allons continuer notre examen ſous le point de vüe ci-devant (corollaire 3) & nous attacherons à decouvrir principalement la nature des parties colorantes des fleurs.

(*) Je crois qu'on pourroit adopter ici les idées de M. Homberg ſur la lumière, qu'il regardoit comme le ſeul principe actif de tous les mixtes, & qu'il appelloit ſoufre principe. Voyes Mém. de l'Acad. des ſcien. pour l'an. 1705. pag. 89. & ſuiv.

Les obſérvations & les expériences dont je viens de rendre compte, m'ayant raſſuré ſur les doutes qui s'élèvoient de toute part contre les idées que je m'étois faites ſur la cauſe productrice des couleurs, ſur la nature de cette cauſe, & ſur les moyens dont ſe ſert la nature pour les devélopper. Je me propoſai d'enrichir autant qu'il ſeroit en mon pouvoir cette partie de la végétation du plus grand nombre de faits : après l'avoir enviſagée ſous un point de vüe botanique & phyſique je crûs ne pouvoir rien faire de mieux que de l'examiner d'une manière plus intime par les ſecours de la Chimie.

Quelques perſonnes aux quelles je communiquai mon projet ne crurent pas devoir m'y encourager, & je n'ai pas trouvé de motifs bien engageants dans les Auteurs que j'ai conſulté : il étoit queſtion de tenter ſi les couleurs des fleurs ſoutiendroient à la violence du feu de vitrification & ſi elles ſeroient propres à peindre le verre. M.r Pott Auteur de la Lithogeognoſie dit formellement en pluſieurs endroits que les couleurs végétales ne ſupportent pas le feu de vitrification. M.r Schaw aſſure la même choſe, ainſi que le Baron d'Holbach dans ſes notes ſur Neri, & M.r de Montami enfin, qui dit en pluſieurs endroits de ſon excellent traité de la peinture en Email que l'on doit rejetter toute ſorte de couleurs animales, & végétales comme incapables de ſervir, ne me donnoient pas comme l'on voit de grands encouragemens.

Je communiquai mes idées à mon Ami M.r le Comte de Saluces à qui ces matières n'étoient pas neuves, & j'eus autant de plaiſir alors de voir dans ſon livre de mémoires que je m'étois rencontré avec lui, de ce que j'en ai maintenant de lui en faire honéur ; Nous traitames quelque tems cet objet, & une argument qui nous parut

toujours deciſif eſt celui que, les verres dont le fondant eſt un ſel alkali végétal, ſont toujours verds ou verdatres, pendant qu'ils ſont jaunes avec le plomb, pourpre avec l'or, bleuatres avec le cuivre &c., ainſi que l'ont remarqué pluſieurs célébres Chimiſtes.

Or ſi les végétaux dont on retire le ſel alkali pour l'uſage des verreries après avoir ſoufert toutes les opérarations qui ſont néceſſaires pour être reduits en ſel & après avoir eſſuyé le dégré de feu qui eſt néceſſaire pour mettre en fuſion les matières vitrifiables, & pour s'y combiner dans l'état de vitrification, portent neantmoins cette teinte aux verres, pour quoi les fleurs, les racines &c. ne fourniroient elles pas juſqu'à un certain point leur couleur naturelle aux verres dans leſquels on les auroit employées après avoir été réduites en ſel?

Nous ne ſavions pas voir de différence entre les parties d'une même plante pour être fondés à penſer que les unes fuſſent compoſées de parties plus fixes que les autres: la delicateſſe des couleurs ne nous autoriſoit pas non plus à une telle ſuppoſition; de manière que le doute nous paroiſſoit aſſés fondé pour ne pas balancer plus long tems à tenter l'expérience, & jé m'y déterminai d'autant plus volontiers qu'ayant répété un grand nombre des expériences, dont Mr Henckel ſe ſert pour prouver la grande alliance qu'il y a entre le régne végétal, & minéral je me trouvois auſſi convaincu que lui des principes qui ſont contenus dans ſon excellent ouvrage du *Flora ſaturniſans.*

La néceſſité d'un feu violent, & continuè m'engagea à profiter de celui des fourneaux de la verrerie Royale, nos eſſais ayant manqué dans le fourneau à vent du laboratoire de Monſieur le Comte de Saluces: J'aurois ſouhaité de reuſſir un verre purement végétal pour être à couvert de tout ſoupçon, ce qui eſt de la plus grande difficulté car non ſeulement on n'y parvient que

par un feu très-violent, mais ce verre tombe aisément en déliquescence.

Pour remédier à cet inconvenient on acoûtume de le mêler avec quelque matière vitrifiable pour avoir un corps d'une plus grande dureté, cependant malgré cette combinaison ce verre est toujours verdâtre tenant à la matière végétale dont il a été composé, c'est-à-dire aux cendres de Kali, ou d'autres plantes; de façon que dans les fabriques l'on est dans l'usage d'y joindre un peu de Magnesia, ou Manganese qui a la propriété d'éclaircir le verre, & de lui ôter la couleur verdâtre, ce qui l'a fait nommer par quelqu'un le savon du verre. Voyés l'ouvrage de M. Montami.

La fumée qui s'éléve des fleurs que l'on brûle pour les réduire en cendre est si distinctement colorée de la couleur de ces mêmes fleurs que je commençai à douter du succès: je continuai cependant la préparation des cendres d'une grande quantité de fleurs de toute espéce sans oublier celles qui sont parfaitement blanches, & dont le résultat m'intéressoit beaucoup, persuadé qu'elles ne fourniroient aucune couleur au verre: J'en préparai aussi à la manière de Tackenius dans l'espérance de retenir une plus grande quantité de parties colorantes, mais elles n'en furent pas plus chargées après la calcination qui étoit absolument nécessaire pour en chasser toute l'humidité, ainsi je préférai de me servir de la méthode de les brûler en plein air; d'autant plus que j'aperçus par quelques essais que l'humidité qui se deployoit avoit terni les verres que je essayois, & je ne venois pas même à mon but de reconnoître distinctement la couleur que j'avois obtenue des différentes cendres des fleurs.

J'ai commencé par la couleur rouge, ensuite par les autres couleurs principales, & enfin par les fleurs blanches, j'ai changé dans la premiere expérience les propor-

tions, ce qui m'a ſervi de régle pour les autres, & afin que l'on put voir d'un ſimple coup d'œil les réſultats, que j'ai obtenu. J'ai rangé en forme de tables ces expériences où je fairai pourtant les remarques néceſſaires. Il eſt bon cependant de remarquer, que dans la compoſition de mes verres je ne me ſuis ſervi d'autre matière vitrifiable que de la poudre de Callioux (*ſilex corneus*) ou du criſtal de roche; que pour aider la fuſion, je n'ai employé que du ſel de tartre bien depuré, ayant banni le borax & les autres fondans, comme ſoupçonnés avec raiſon de contenir des parties colorantes. Que pour ôter tout ſoupçon de couleur étrangère, j'ai eſſayé le ſimple caillou & le criſtal de roche avec le ſel de tartre qui me donnerent tous deux un aſſez beau verre tranſparent, & point du tout coloré, dont je me ſuis ſervi quelque fois auſſi pour unir aux ſubſtances végétales calcinées. Dans les tables j'ai toujours marqué caillou, quoique je me ſois ſervi indiſtinctement ou d'une matière ou de l'autre. Les eſſais ont été faits dans des petits creuſets au fourneau de verrerie.

MELANGES.	PROPORTION.	RESULTATS.	COULEUR.	REMARQUES.
Fleurs de Pavots *Sel de Tartre.*	*Une partie.* *Une partie.*	*Masse.* *Friable.*	*Cendrée.*	*Où l'on reconnoissoit quelques points rouges.*
Fleurs de Pavots *Caillou . .* *Sel de Tartre.*	*Deux parties.* *Deux parties.* *Une partie.*	*Un Verre.*	*Pourpre.*	*La surface du verre étoit un peu verdâtre avec des tâches rouges*
Fleurs de Pavots *Caillou . .* *Sel de Tartre.*	*Une partie.* *Une partie.* *Une partie.*	*Un Verre.*	*Rouge.*	*Plus beau que le précédent.*
Fleurs de Mauve . . *Caillou . .* *Sel de Tartre.*	*Une partie.* *Une partie.* *Une partie.*	*Substance Vitreuse.*	*Rouge, & violette.*	*De la couleur de la fleur.*
Fleurs de Glaïeul . . *Caillou . .* *Sel de Tartre.*	*Une partie.* *Une partie.* *Une partie.*	*Un Verre.*	*Bleu tendre.*	*Qui ressembloit à l'aigue-marine.*
Fleurs de Genet. *Caillou . .* *Sel de Tartre.*	*Une partie.* *Une partie.* *Une partie.*	*Un Verre.*	*Jaune.*	*Dont les bords du Creuset étoient un peu colorés en rouge.* *
Fleurs blanches. *Caillou . .* *Sel de Tartre.*	*Une partie.* *Une partie.* *Une partie.*	*Un Verre.*	*Point coloré.*	*Qui avoit l'œil verdâtre comme le verre ordinaire.*

(*) La couleur rouge, qui se deceloit dans toutes les compositions avec le genet, me determina à suivre un travail sur cette plante, qui a donné des résultats curieux, comme on pourra voir dans un autre mémoire.

Je laiſſe juger du plaiſir, que j'ai eu du ſuccès de ces expériences, qui me confirmoient dans mon idée, puiſque chaque fleur colorée a donné dans la vitrification ſa couleur naturelle fort diſtinctement, & les blanches n'en donnerent point.

J'ai cherché enſuite à examiner ſi j'aurois reçu les mêmes réſultats des autres ſubſtances végétales colorées. J'ai examiné la racine de Garance ſi connüe par ſa teinture, la Béterave qui eſt ſi colorée, & la Gueſde dont on ſe ſert pour la teinture bleüe. J'ai enſuite fait des expériences ſur des graines colorées, & ſur la ſubſtance farineuſe des ſemences. Le *Solanum* fût le fruit, ou plutôt la graine que j'ai examinée; c'eſt un végétal du Bréſil fort coloré en pourpre, que M. le Docteur Dana Profeſſeur de Botanique a fait végéter dans notre climat, & lui a fourni des ſavantes obſervations ſur la teinture (24).

Le réſultat eſt digne d'attention, car ce *Solanum* colora le verre beaucoup plus, proportion gardée que les cendres des fleurs.

Les ſubſtances farineuſes donnerent des couleurs aprochantes du blanc émaillé; il m'a paru même d'entrevoir que les fruits, & les graines donnent plus de couleur, enſuite les fleurs, après celle-ci les racines, & les ſemences très-peu.

(24) Je dois de même faire honneur à M. le Docteur Dana qui ſe fit un vrai plaiſir de me donner ce fruit avec les préparations qu'il en avoit faites en m'inſtruiſant des expériences qu'il avoit entrepriſes & de leur réſultats.

TABLE SECONDE.

MELANGES.	PROPORTION.	RESULTATS.	COULEUR.	REMARQUES.
Garance. Caillou. Sel de Tartre.	4 parties. 4 parties. 3 parties.	Un Verre.	Verd obſcur.	Avec des petites tâches rouges.
Betterave. Verre pulveriſé.	Une partie. Une partie.	Un Verre.	Violet.	Pas beaucoup clair.
Iſatis ſativa. Caillou. Sel de Tartre.	4 parties. 4 parties. 3 parties.	Un Verre.	D'un verd obſcur.	Couleur de la plante. (*)
Solanum. Caillou. Sel de Tartre.	4 parties. 2 parties. 2 parties.	Un Verre.	Pourpre foncé.	Plus coloré que celui des fleurs.
Farine. Caillou. Sel de Tartre.	4 parties. 4 parties. 2 parties.	Subſtance vitreuſe.	Blanchatre.	Aprochant à l'émail.
Ris. Caillou. Sel de Tartre.	4 parties. 4 parties. 4 parties.	Subſtance vitreuſe.	Plus blanche.	Auſſi émaillée.
Feves. Caillou. Sel de Tartre.	4 parties. 4 parties. 2 parties.	Subſtance vitreuſe.	Un peu verdâtre.	Auſſi émaillée.

(*) Cette plante que les François nomment *paſtel*, ou *gueſde*, & nos artiſtes *Vaud* donne une teinture bleüe, mais c'eſt par la chaux vive, & l'alun qu'on l'obtient.

La foibleſſe des teintes colorées de la couleur de la fleur, qui paſſoit dans mes verres m' avoit fait ſoupçonner que par l' incinération & la calcination il ſe fit une grande perte de la matière colorante, attendu la grande évaporation qu' elle ſouffroit, & je voyois d' ailleurs clairement que les chaux des fleurs contenoient beaucoup d' autres parties non colorantes; pour y remedier j'ai tenté de me ſervir des ſucs concrets, & j'ai eſſaïé celui de Pavots extrait avec l' eſprit devin, qui à la verité avoit retenu d'avantage la matière colorante, mais l'umidité qui ſe developpoit rendant mes verres ternes je fus contraint d'abandonner cette méthode.

Je me decidai alors de ſeparer ces principes par des lixiviations repétées pour m'aſſurer de ce qu'il reſulteroit de ces ſucs concentrées & enſuite calcinés: car ainſi que je l'ai remarqué pag. 18. les fleurs reſtoient entierement dépourvuës de couleur après une forte decoction & d'ailleurs j'avois éprouvé que le Marc du *genét* & du *Solanum* que j'avois retiré d'une leſſive reiterée ne donnoit plus la moindre teinture aux verres. Je ne diſſimulerai pas ici le plaiſir que me fit la lettre de M.r le Comte de Saluces du 18. avril 1770., où il traite cet objet, & celle du premier maj qui contient des expériences & des obſervations ſur la racine de garance; je me fais un devoir de rapporter ces articles qu'on trouvera dans la note ſuivante.

EXTRAIT DES ARTICLES DES LETTRES. DE M. LE COMTE DE SALUCES.

D'ailleurs, mon cher Comte, il n'y a dans les fleurs que quelques parties qui ſoient deſtinées à les colorer, & dont on peut faire uſage pour peindre le verre. Voici mon procédé pour les ſeparer d' avec les parties abſolument non colorantes. Faites la decoction de telles fleurs qu'il vous plaira Juſqu' à ce que les pétales ou les feuilles ſoient entierement décolorées, évaporées en lentement l' umidité, & après la deſſiccation; calcinez le ſuc, & vous aurés la partie colorante: calcinés enſuite les feuilles ou le marc de votre ſuc, & vous n'obtiendrés aucune couleur: ce qui prouve que la partie colorante s'eſt combinée avec la

Il me reſtoit à voir ſi les ſels extraits des fleurs auroient, pour ainſi dire, ramaſſé toute la partie colorante, & ſi j'aurois coloré davantage, & avec plus de vivacité les verres, ce qui eſt en effet arrivé avec les ſels des fleurs de Pavot, de Genet, & de Garence qui donnerent des verres très-colorés chacun de la couleur de la fleur, comme on peut le voir dans la table troiſième.

Les expériences ſur les verres ayant parfaitement répondu à mon attente, je voulus eſſayer encore ſi ces couleurs végétales étoient à portée de colorer les chaux métalliques; j'ai pris du *minium*, avec lequel j'ai fait le mélange avec les différentes cendres des fleurs, comme on peut voir dans la table quatrième.

partie ſaline. Eſt ce maintenant le phlogiſtique ou des parties métalliques qui donnent la couleur? Où eſt ce de l'action du premier ſur celles-ci qu'on l'obtient? Paſſons maintenant au ſecond extrait . . . *Vous ſcavés que la vitrification avec les cendres de racine de garance vous a manqué, ce qui ſuivant mes principes me paroiſſoit extraordinaire, j'en ai donc cherché la raiſon & le moyen de faire paſſer cette couleur dans les verres. J'ai imaginé que par un feu vif & ouvert tel qu'il le faut pour la calcination, la partie colorante, qui doit avoir ſelon moi une grande affinité avec le phlogiſtique, étoit preſque toute enlévée; car vous ſavés que cette racine abonde en huile & en parties volatiles. Je commencai donc par méler une partie de ſel de tartre ſur deux de poudre de garance. Vous connoiſſés la couleur naturelle de cette poudre qui eſt couleur de feuille morte, immediatement elle prit une couleur rouge preſque cremoiſi & manifeſta une odeur tres-vive de champhre. Je fus fort ſurpris de ces deux effets & ayant mis le tout dans un alembic de verre au bain de ſable, je commencai la diſtillation par un feu doux que je pouſſai par dégré à la derniere violence, & juſqu'à ce qu'il ne paſſoit plus rien dans le recipient. J'obtints par cette diſtillation deux liqueurs, dont la premiere eſt jaune, & la ſeconde eſt une huile empireumatique vétitable, n'ayant pas encore pû examiner la premiere, le Caput mortuum étoit une ſubſtance grénuë charboneuſe, mais d'une couleur à-peu près comme le bleu de Pruſſe très-foncé. C'eſt cette fecule que j'ai combiné avec la moitié de poudre de marbre, & j'ai obtenu un verre coloré rouge jaunatre, très-beau & très-tranſparent.*

TABLE TROISIÈME.

MELANGES.	PROPORTION.	RESULTATS.	COULEUR.	REMARQUES.
Suc de Pavots. *Verre pulverisé.*	*Une partie.* *Une partie.*	*Un Verre.*	*Rouge.*	*Dont l'humidité l'avoit beaucoup noirci.*
Genet lessivé. *Caillou.* *Sel de Tartre.*	*Une partie.* *Une partie.* *Une partie.*	*Un Verre.*	*Verd foncé.*	*Comme celui des bouteilles de Bourgogne.*
Solanum lessivé. *Caillou.* *Sel de Tartre.*	*Une partie.* *Une partie.* *Une partie.*	*Un Verre.*	*Fort verd.*	*Où cependant il y avoit un soupçon de rouge.*
Sel de Pavots.	*Une partie.*	*Une masse.*	*Rouge.*	*Qui après quelques jours tomba en deliquium.*
Sel de Pavots. *Verre pulverisé.*	*Une partie.* *Une partie.*	*Un Verre.*	*Rouge.*	*Dont la couleur passa le couvercle du creuset.* (*)
Sel de fleur de Genet *Caillou.*	*Une partie.* *Une partie.*	*Substance vitreuse.*	*Jaune dorée.*	*Un peu coloré en rouge sur le bords, & émaillée.*
Sel de Garance. *Caillou.*	*Une partie.* *Une partie.*	*Substance vitreuse.*	*Teinte en rouge.*	*Un peu émaillée*

(*) La volatilité fût si grande que le bas du creuset fût aussi coloré en dehors malgré sa grande épaisseur même dans la couleur rouge la volatilité m'a paru plus sensible.

TABLE QUATRIÉME.

MELANGES.	PROPORTION.	RESULTATS.	COULEUR.	REMARQUES.
Fleurs de Pavots Minium.	*Une partie.* *Une partie.*	*Maſſe.*	*Rouge.*	*Où le plomb étoit réduit en litharge*
Fleurs d'Iris. Minium.	*Une partie.* *Une partie.*	*Le plomb fut en partie revivifié.*	*Avec des points bleus.*	*La couleur ſe ſoutint à un plus grand feu.*
Fleurs de Genet. Minium.	*Une partie.* *Une partie.*	*Une maſſe friable.*	*D'un très-beau jaune*	*Qui à un plus grand feu devint un verre jaune.*
Fleurs blanches. Minium.	*Une partie.* *Une partie.*	*Maſſe friable.*	*Grisâtre.*	*Aprochant du petit verd.*
Suc de Pavots. Minium.	*Une partie.* *Deux parties.*	*Eſpéce de litharge.*	*Colorée en rouge à la ſurface.*	*Dont l'humidité avoit terni l'eſſai.*
Sel de Pavots. Minium.	*Une partie.* *Une partie.*	*Subſtance vitreuſe.*	*Un peu colorée en rouge.*	*Qui ſe ſoutint à un plus grand feu.*
Sel de Genet. Minium.	*Une partie.* *Une partie.*	*Subſtance vitreuſe.*	*Jaune doré.*	*Les bords du creuſet étoient rouges, & émaillés.*

(*) L'on voit que les réſultats de ces expériences ſur les chaux métalliques ſont très-conformes aux précédents; que ſi les matières n'ont pas été toutes réduites en verre c'eſt faute du feu violent qui il y auroit fallu pour le verre de plomb, & d'ailleurs le phlogiſtique en revivifie toujours quelque peu.

L'on apperçoit très-aiſément d'après ces expériences que les ſels contiennent la plus grande partie des principes colorants des fleurs, & des autres parties des végétaux à tel point, que avec les ſels extraits des fleurs je ſuis venu à bout de peindre de la porcelaine, de la fayance & de l'émail, & que auſſi en ſe donnant du ſoin l'on peut colorer du criſtal, & imiter de cette façon les pierres fines.

Je finirai ces détails par l'examen que je fis ſur le bois pétrifié, ſubſtance jadis appartenante au regne végétal, (qui eſt rangée à préſent par les Naturaliſtes dans le minéral) pour obſerver ſi elle contenoit quelques deviſes de ſon premier état : l'ayant dont agrégé avec du ſel tartre j'ai obtenu un verre très-beau preſque tranſparent couleur d'agathe, où l'on ne reconnoiſſoit pas la moindre trace de verd. (4)

Tel eſt le précis des expériences que j'ai fait ſur les fleurs, & les autres parties colorées de végétaux (5),

(4) Il n'en eſt pas de même des os foſſiles, qui ne perdent jamais de leur nature, & ne peuvent être jamais rangez dans le regne minéral, puiſque on obtient au grand feu par leur diſtillation une huile empireumatique, & un ſel volatil, & le *caput mortuum* mêlé avec la fritte donne un verre blanc & opaque, caractéres diſtinctifs du regne animal, comme jaurai lieu d'obſerver dans la ſuite. Voyez M. Carl. dans ſon traité du *Lapis Lydius oſſium foſſilium.*

(5) J'ai tenté pluſieurs expériences pour pouvoir ranger celles-ci dans un certain ordre, j'ai tâché avec toute la briéveté de n'omettre aucune circonſtance intéreſſante au ſujet, comme auſſi de rapporter avec toute l'impartialité les réſultats, ce que l'on eſt dans le cas de vérifier, en refaiſant les expériences. Je dois avvertir pour ceux qui voudront ſe donner la peine de les ſuivre, qu'il faut avoir un attention toute particulière dans l'adminiſtration du feu, puiſque attendu la volatilité de la matière colorante, telle cendre, ou tel ſel, qui, après un tel tems de feu vous donnera une belle couleur, ſi vous le laiſſez quelque heure davantage la couleur s'affoiblit, ce qui arrive auſſi aux couleurs métalliques de la porcellaine, & de l'émail. Je ne ſaurois indiquer des régles préciſes, c'eſt la pratique qui doit éclairer là deſſus. J'aurois à la vérité pû rendre plus beaux les verres des eſſais, en changeant les melanges & les proportions ; cependant

& il me paroit démontré que la matière colorante dans les fleurs, comme dans les autres parties des végétaux eſt une matière ſolide & inhérente, & qui, par conſéquent n'eſt pas ſujette ſi aiſément à changer.

Nous ne connoiſſons, que les ſubſtances métalliques capables de teindre le verre, n'y auroit-il pas lieu de croire que ce ſont auſſi des parties métalliques qui produiſent la couleur dans les fleurs, & dans les autres parties des végétaux? Que ces parties étant extrêmement diviſibles & ſolubles dans l'eau par le moyen des ſels, ſont dans le cas d'être introduites dans les vaiſſeaux capillaires des plantes, & des fleurs, & qu'à l'aide du phlogiſtique leur couleur en eſt développée, ne devant pas au reſte confondre le phlogiſtique, & la matière colorante, comme a fait M. Pott, puiſque ce ſont deux matières bien différentes à mon avis, l'une pour parler le langage des Anciens étant la matière, & l'autre la forme.

Ce puiſſant reſſort de la nature, cet agent général qui ſe trouve dans tous les corps, pourroit très bien être le fluide électrique; j'ai été charmé de trouver dans le dernier ouvrage du célébre M. Francklin un ſentiment très-conforme (6) „ Je ſuis porté, dit-il, à croire que le „ feu fluide, de même que l'air fluide eſt attiré par les

comme je portois au reſte mon attention ſur les réſultats de la couleur, que les ſubſtances végétales m'auroient donné dans la vitrification, j'ai cru pouvoir m'en diſpenſer d'autant plus, que comme j'ai dit, j'ai banni toutes les matières, qui étoient ſoupçonnées de contenir des parties colorantes.

(6) I hare been rather inclined to think that the fluid *fire* as well as the fluid *air*, is attracted by plants in their growth and becomes conſolidated with the other materials of which they are formed and makes a great part of their ſubſtance: That when they come to be digeſted and to ſuffer in the veſſels a kind of fermentation part of the fire as well as part of the air recovers its fluid active ſtate again and diffuſes itſelf in the body digeſting and ſeparating it. Expériments and obſervations on Electricity and Benjamin Franclin London 1769 Lettre 26 page 346.

„ végétaux, & qu' il s'unit, & fait corps avec les autres „ matières, dont ils ſont formés, & dont il fait dès lors „ la principale partie. „ Il n'eſt pas difficile d'appercevoir que à l'aide de ce feu les végétaux reçoivent un principe vital, & le développement de la couleur; (7) il ſeroit à déſirer que l' illuſtre M. Francklin voulut par ſes ſavantes obſervations examiner cette partie qui lui fourniroit une carriére lumineuſe à parcourir.

De ce que nous voyons que la chaîne étroite, qui lie le regne végétal au minéral, lie encore plus étroitement l'animal au végétal, ne peut-on pas ſoupçonner que cette chaîne s'étend auſſi de l'animal au minéral? de ſorte que ce que j'ai dit plus haut, ne ſoit pas ſans probabilité, ſavoir qu'il n' y a qu'une même cauſe productrice des couleurs dans les trois regnes, puiſque par quelques eſſais, que j'ai fait ſur des ſubſtances animales, j'ai obtenu les mêmes réſultats que dans les végétales.

Je me contenterai de rapporter l'expérience que je fis ſur le ſang, la ſubſtance animale la plus colorée, & la plus belle: les ſentimens de ceux qui ont traité de ſa couleur ſont partagés, quelqu'un a cru de devoir l'attribuer au ſouffre, qui y eſt contenu; quelqu'autre aux ſels; au mercure ſubtil, ſelon Paracelſe. Haller quoique il

(7) Il me paroit que ce n'eſt pas ſans probabilité que on a ſuppoſé le fluide électrique, comme le moteur de la partie colorante; nous en voyons une preuve dans la revivification, & vitrification des chaux métalliques (*a*), comme auſſi dans les taches circulaires colorées, lorſque l'on fait paſſer la commotion electrique à travers des feuilles de différent métaux placés entre deux lames de verre poli. (*b*)

L' expérience de M. Prieſtley ſemble le prouver d'avantage, car ayant fait paſſer l'exploſion électrique ſur la ſurface de l' huile de vitriol, il vit une couleur fort rouge à la ſurface de l' huile qui étoit ſurément due au fer: hiſtoire de l' électricité Tom. 3 pag. 390.

(*a*) Beccaria elettriciſmo artificiale §. 738, e ſuiv.

(*b*) Expériences, & obſervations ſur l'électricité faites à Philadelphie par Beniamin Franklin Tom. 2 pag. 53, & ſuiv.

ait adopté dans les premiers ouvrages le ſentiment de Boherawe ſon maître, c'eſt-à-dire, que la couleur du ſang étoit produite par la denſité des globules. Dans les derniers il a propoſé une opinion tout-à-fait vraiſemblable, c'eſt-à-dire, que la couleur rouge étoit due aux particules ferrugineuſes contenues dans le ſang (8), appuyant ſon opinion ſur les expériences de Geofroi de Lemeri & ſurtout ſur celles du ſavant Menghini, & des Académiciens de Bologne, (9), qui ont trouvé que preſque toute la partie rouge du ſang après avoir été torreſiée au feu, étoit attirable par l'aimant, & avoit toutes les propriétés du fer.

En effet ayant calciné du ſang, j'en ai obtenu une chaux colorée en rouge comme du ſaffran de mars, laquelle a été attirée en partie par l'aimant, ce qui ne me laiſſoit plus aucun doute ſur l'exiſtence du fer (10), ayant donc mêlé parties égales de cette chaux avec du verre pulveriſé dans un creuſet au feu de verrerie, la matière fût réduite en verre, dont la ſurface étoit blanche comme l'eſt ordinairement le verre fait avec des parties animales, mais ayant caſſé le creuſet le verre étoit extrémement rouge en dedans, même la couleur rouge paſſa le creuſet par ſa grande volatilité à peu-près de la même façon, que j'ai obſervé dans l'expérience cinquième ſur le ſel de Pavot Table III.

(8) *Elementorum phiſiologiae.*

(9) *Commentaria Bononientia Tom. II. pag. 2 Vincentii Menghini diſſertatio de ferrearum particularum ſede in ſanguine pag. 244.*

(10) Le Médecins acoûtument de donner des préparations de fer dans les maladies, où la partie coloranie du ſang ſe diminue, comme dans les pâles couleurs dans quelques eſpéces de cachexies, dans les hidropiſies &c. Mais il ne ſont pas d'accord ſur la préparation à laquelle ils doivent donner la préférence, il me paroit que le fer du ſang calciné ſeroit, peut-être, plus analogue, & plus facile à reprendre ſa forme, je laiſſe aux Médecins à décider ſur cet article.

L'on voit par cette expérience qu'il y a un seul principe colorant dans les trois regnes. Le verre que j'ai obtenu du sang, celui que j'ai obtenu du sel de pavots, & celui que l'on obtient par les safrans de mars sont trois rouges des trois regnes différents, & si celui fait avec le sang, est très-analogue à celui du safran de mars par le fer que l'on y a reconnu (11), ne pourroit on pas présumer que celui qui a été composé avec les pavots doive sa couleur à quelque partie métallique aussi? Et comme j'ai reconnu une grande volatilité dans le principe colorant du sang, quoique d'ailleurs il soit inconteſtable que ce principe est métallique, on ne doit pas être surpris de la même volatilité dans les couleurs végétales, & cette volatilité ne m'empêche pas de les croire métalliques.

Quelques autres essais sur des substances animales me donnerent des résultats conformes aux précédentes dont je me reserve à traiter plus particulièrement.

Les métaux donnent la teinture au verre en différentes couleurs, dont chaque métal lui donne la sienne particulière; l'or donne au verre la couleur pourpre, l'argent, la jaune, le cuivre une couleur bleuâtre, le fer lui donne un verd foncé, le regule d'antimoine donne la jaune, l'étain

(11) La couleur rouge du grenat du jaspe rouge du porphire, de la terre rouge d'Angleterre, que l'on demande beauté, & quantité d'autres substances du regne minéral, dans lesquelles on reconnoit très-distinctement le fer, & à qui l'on doit la couleur rouge paroit en fournir une autre preuve.

(12) Je ne doute pas, que les belles couleurs du plumage de certains oiseaux viennent du même principe. M. De Buffon observe très-bien, que les pays chauds fourniſſent une plus grande variété de couleurs. (c) Il me paroit d'y entrevoir la même raison, que dans les plantes; une plus grande chaleur développe davantage les principes colorants, qui sont métalliques dans tous les regnes. C'est le sujet du prix de l'Académie de Berlin proposé pour l'année 1772 que d'éclaircir la raison de la couleur du plumage des oiseaux, & dont je suis bien curieux de savoir la résolution.

(c) Buffon histoire des oiseaux Tom. I. disc. prélim. p. 22.

l'étain & le zinc leur donne une couleur laiteuſe, les différentes terres colorent le verre, & par la couleur qu'elles donnent, nous connoiſſons les parties métalliques qui ſont contenues dans ces terres.

Si nous examinons les pierres colorées, l'on a grande raiſon de croire qu'elles doivent leurs couleurs au même principe, c'eſt-à-dire aux parties métalliques, tel eſt le ſentiment du célébre Chevalier Linné (13), & de

(13) „ Quartzum enim, & ſpatum, dum in metalla habitant colorata re-
„ perimur, color autem eorum cum rubigine ſeu ocra ipſius me-
„ talli ſemper concidit ocra enim ferri, quae aut brunea, aut lutea,
„ aut rubra eſt, lapides iiſdem tingit coloribus. Ocra cupri quae ab
„ accido fit viridis, ab alkali cyana aut viridi, aut violaceo lapides
„ tingit colore. Hae ocrae, quoniam vulgares ſunt, ita etiam hi
„ colores lapidum vulgariſſimi.

Le même Linné dit dans un autre endroit, *omnis fere color in Regno lapideo a metallis ſuam ducit originem, hinc Boherawius* (d), *gemmae inquit pellucidae quidem, ſed eximio nitentes colore videntur materiem habere ceteris ſimilem, ſed pigmentum metalliam in primis aut & alium fixmm, & fiſſile in ipſa nativitate, quam intime permixtum, unitumque illa quippe evincit colorum ſimilitudo, atque artificioſa gemmarum confectio.*

„ Ferrum dat vitriolum vitride, ſed ocram luteam, quae urtione
„ rubra evadit, & hinc rubinus ruber. (e)

„ Cuprum dat vitriolum caeruleum, ſed ocram vividem ab acido,
„ ut in ſmaragdo, ocram caeruleam ab alkali fixo, ut in Zaffiro,
„ Cyanam ab alkali volatili, ut in Beryllo.

„ Plumbum dat vitriolum album, ſed ocram albido flavam, ut in
„ topatio.

„ Bismutum dat ocram rubicundam, ut in hiacynto, ergo vidi-
„ mus colorem criſtallorum dependere ab ocra ipſius metalli figu-
„ ram autem a ſalibus. Linnei ammenitates Accademicae Martini
„ Kaller de criſtallorum generatione p. 471 Tom. V.

(d) Boherawe chem. 1, 54.

(e) Quant aux Rubis, Libavius a cru qu'on devoit en attribuer ſa couleur à l'or nous ſavons que l'on en trouve dans les mines d'or, ou bien tout près, & ſur cette particularité il a dit que l'on pouvoit très-bien imiter la couleur du Rubis, en mêlant avec le criſtal une teinture d'or réduite en liqueur ou en huile par la diſſolution. Voyez Libavius. Lib. 2 chap. 35.

Il ſe peut très-bien que la vapeur de l'or pénétrant ces pierres criſtallines, puiſſe leur donner cette couleur comme l'expérience nous le fait voir, dans les pierres artificielles, comme il y a plus de probabilité que le grenat, le jaſpe, l'ématite, la cornaline doivent leurs couleurs an vapeurs du fer; dont on connoit l'exiſtence.

M. De Romé Deslile (14), il n'eſt pas difficile de concevoir de la manière, que les ſpaths les quarts, les criſtaux, & les pierres ſe colorent par les vapeurs métalliques, ſi l'on examine la manière dont ſe forment les métaux, auxquels les ſpaths, & les quarts ſervent de matrice, l'on peut conſulter à ce ſuiet un ſavant mémoire de M. Eller dans les mémoires de l'Academie de Pruſſe an. MDCCLIII. Tom. IX. pag. 3.

Cependant comme le fer eſt plus généralement repandu dans la nature ſoit dans le régne minéral, où l'on ne ſauroit trouver que très-peu de corps qui n'en contiennent pas; ainſi que nous les voyons dans les pierres, les marbres, les terres, les argilles &c., ſoit dans le régne végétal & animal, où on le reconnoit très-diſtinctement dans quantité de plantes, & d'animaux (15), il pourroit bien être la ſource de toutes les autres couleurs végétales; que ſi on lui a déjà attribué la verte du régne végétal en gros, il ne ſeroit pas mal à propos de lui at-

(14) Le ſentiment de M. Romé Deslile dans ſon traité de la Criſtallographie eſt très-conforme a celui du Chevalier Linné ſur la raiſon de la couleur dans les criſtaux, & dans les pierres précieuſes due aux ſubſtances métalliques. „ Tous ces criſtaux colorés (dit-il p. 184) „ ſe forment pour l'ordinaire dans les mines, & doivent leurs cou„ leurs à dès émanations métalliques, qui s'y incorporent dans le „ temp qu' ils ſont encore fluides, ou qui s'attachent a leur ſurface, „ lorſque ces criſtaux ont pris trop de conſiſtance pour s'en laiſſer „ pénétrer.

A l' égard de la couleur des pierres précieuſes (dit-il pag. 196.) „ La plus part des Naturaliſtes l'ont attribué comme celle des cri„ ſtaux aux vapeurs métaliques, qui circulent dans les mines, ou au „ mélange de quelque diſſolution des ſubſtances minérales, mais ces „ Auteurs ont été peu d'accord l'eſpéce de métal qui coloroit telle, „ ou telle pierte.

Il rapporte enſuite le paſſage de Chevalier Linné que je viens de citer.

Eſſai de Criſtallographie par M. De-Romé Deslile à Paris 1772.

(15) L'on pourra conſulter les Commentaires des Savants Académiciens de Bologne pour voir des expériences très-curieuſes ſur le fer retiré des plantes, & des animaux Comm. Bonon. Tom. II. pars I, p. 109.

tribuer les autres auſſi, puiſque nous ſavons, que, outre la grande facilité qu'il a d'être attaqué par tous les menſtrues, ce qui prouve ſa grande diviſibilité, nous voyons qu'à l'aide de différentes opérations l'on parvient à en tirer toutes les couleurs, ainſi que M. le Comte de Saluces le prouve dans un ouvrage qu'il prépare ſur ce ſujet.

Il me paroit d'entrevoir que la nature toujours ſimple dans ſes opérations a établi un même principe colorant dans les trois régnes, au moyen de cette admirable chaîne qui en lie toutes les parties; que ce principe eſt métallique; que dans le régne végétal ces parties réduites en forme ſavoneuſe ſont introduites dans les (16) plantes, & y décélent leur couleur; que dans le corps minéraux, enfin elle eſt apportée par les vapeurs volatiles.

Que la cauſe de ſon développement n'en eſt qu'une ſeule auſſi, c'eſt-à dire, le phlogiſtique.

Cette partie de la phiſique mérite aſſez d'être approfondie, & nous offre un champ vaſte pour augmenter le nombre de nos connoiſſances.

J'eſpére que la nouveauté du ſujet fera acueillir favorablement ce mémoire, & je me reſerve à faire des plus amples obſervations, pour mettre la matière dans ſon plus grand jour.

(16) C'eſt encore là la penſée de M. le Comte de Saluces, ſavoir que la nutrition ſe fait dans les plantes par interſuſception, & que le ſuc néceſſairement doit prendre cette nature au moyen des ſels, & de l'eau pour paſſer dans tous les plus petits vaiſſeaux, & y être diſtribués dans toutes les parties de la plante ſans les endommager.

CAROLI ALLIONII
AUCTARIUM
AD SYNOPSIM METHODICAM STIRPIUM
HORTI REG. TAURINENSIS.

Exhibet hoc opuſculum enumerationem plantarum, quibus Hortus Regius Taurinenſis auctus eſt ab anno 1762, *quo prodiit Miſcellaneorum Taurinenſium Tomus alter. Ut autem in hoc auctario commode Tyrones, & Botanici ſtirpes, quas addidi, reperire poſſint, paucis omnino mutatis eamdem methodicam diſpoſitionem ſervavi, ſimiliterque ſpecies ad Linnaena genera tenaciter retuli. Nominibus quoque* trivialibus *uſus ſum Cl.* LINNAEI, *ſed illae ſtirpes, quas* LINNAEUS *non habet, indicantur nominibus, quae a Cl. Viris* JACQUIN, & CRANTZ *mutuatus ſum, aut ipſe aſſignavi, ſi nullum adhuc haberent. Opportunum porro judicavi huic auctario iterum inſerere ſtirpes quaſdam in ſynopſi jam recenſitas, quae nullum tunc temporis* triviale *nomen habebant. Quae minus notae aut novae ſunt, brevi deſcriptione ita definiuntur, ut ſaltem certo nunc internoſci poſſint; alio autem loco, & copioſius, & icone illuſtrabuntur.*

CLASSIS PRIMA.

Plantae flore monopetalo simplici.

I. MONOSTEMONES.

Boërhavia erecta. L.
diffusa. L.
Najas major * (1)
minor * (2)

II. DISTEMONES.

A. GYMNOSPERMAE.

Salvia indica. L.
hispanica. L.
disermas. L. (3)
serotina. L. (4)
haematodes. L.
aurea. L.
acetabulosa. L. (5)
pomifera. L.
pinnata. L.
sylvestris. L.
syriaca. L. (6)
aegyptiaca. L.
lyrata. L.
clandestina. L. * (7)
ceratophylloides. L.

(1) *Fluvialis latifolia fructu minus obtuso monospermo* MICH. *gen. p.* 11 *T.* 8 *f.* 2.

(2) *Fluvialis minor foliis angustissimis denticulatis, deorsum reflexis, fructu acuto tenuiori monospermo* MICH. *gen. p.* 11 *T.* 8 *f.* 3.

(3) Haec est *salvia villosa, & viscosa foliis lanceolato-ovatis versus petiolum angulatis Misc. Taur. Tom. II. p.* 49, quam Cl. ARDUINI notam fecit *spec. I. p.* 9 *T. I.* Huius autem Cl. Viri liber anno 1759 editus ad manus nostras tunc nondum venerat.

(4) Haec est *salvia Americana Chia dicta Misc. Taur. Tom. II. p.* 49 etiam ab ARDUINI descripta *spec. I. p.* 10 *T.* 2.

(5) *Salvia or. foliis subrotundis acetabulis moluceae Tourn. cor. pag.* 10 *& Misc. Taur. p.* 49.

(6) *Syriaca L.* non differt ab *Aegyptiaca L. mantiss. p.* 26 *n.* 36, sed ARDUINI synonimon sub *Syriaca* positum in *syst. p.* 65 *n.* 18 pertinet ad *salviam disermas L.*

(7) *Clandestinam salviae verbenacae* varietatem esse puto, cum eam in horto Taurinensi cultam non modo flores ex purpureis caeruleos, sed omnino ampliores, quales in *Verbenaca* occurrunt, protulisse viderim.

nivea. (8)
caesia. (9)
Ziziphora capitata. L.
Verbena carolina. L.
mexicana. L.
indica. L.
curassavica. L.
nodiflora. L.
jamaicensis. L.
orubica. L.
supina. L.
Monarda punctata. L.
clinopodia. L.
fistulosa. L.

B. MONANGIAE.

Amethystea caerulea. L.
Pinguicula vulgaris. L. *
Utricularia vulgaris. L. *

C. DIANGIAE.

Veronica longifolia. L. *
spuria L.
scutellata. L. *
aphylla. L. *
bellidioides. L. *
peregrina. L.
Virginica. L.
fruticulosa. L. *
prostrata. L. *
latifolia. L. *

D. FRUCTU PULPOSO.

Jasminum humile. L.
Phillyrea angustifolia. L. *
media. L. *

III. TRISTEMONES.

A. HYPOCARPIAE.

Montia fontana. L. *

B. EPICARPIAE.

1. *Flore calyculato.*
Melothria pendula. L.
Cucumis anguria. L.
prophetarum. L.
chate. L.
Momordica operculata. L.
Bryonia laciniosa. L.
2. *Calyce destitutae.*
Crocus vernus. *
Iris Xiphium. L.
florentina. L.
foetidissima. L.
tuberosa. L.
sibirica. L.
Valeriana sibirica. L.

(8) Hoc triviali nomine indicatur *Salvia cretica angustifolia* CLUS. *hist.* 343 cuius folia brumali praesertim tempore alba omnino, & nivea evadunt.
(9) *Horminum subrotundo folio fl. caesio hispanicum* BARREL. *ic.* 200.

veſicaria. L. *
coronata. L. *
celtica. L. *
dentata. L. *
rubra L. *
anguſtifolia * (10)

IV. TETRASTEMONES.

A. GYMNODISPERMAE.

1. *Flore plano.*

Gallium mollugo. L. *
uliginoſum. L. *
rubrum. L. *
ſpurium. L. *
ſilvaticum. L. * (11)
paluſtre. L. *
ſaxatile. * (12)
lucidum. * (13)
cinereum. * (14)

(10) *Valeriana rubra anguſtifolia* BAUH. *pin.* 165 nullo modo pro varietate *valerianae latifoliae marinae* haberi poteſt. Sic etiam ſpecie inter ſe differunt *veſicaria*, *coronata*, *dentata*.

(11) Eſt *Galium montanum latifolium ramoſum* TOURN. *inſt.* 115 & *Miſc. Taur. p.* 51 *Galium* autem *ariſtatum L.*, & *Galium bericum* TURRA *diar. ital.* 1764 *p.* 119 fortaſſe referri debent ad *Galium ſilvaticum L.* Certe ad hoc pertinet *Rubia laevis linifolia floribus albis montis virginis* BOCC. *mus. p.* 83 *t.* 75. uti probat icon a BOCCONE data, & locus natalis. In collibus enim Taurinenſibus abundat *Galium ſilvaticum*, & ex Etruria accepta ſpecimina *Rubiae levis linifoliae* ad idem *Galium* ſpectant.

(12) *Galium foliis ſenis ellipticis, petiolis breviſſimis unifloris* HALL. hiſt. n. 718, & *Galium ſaxatile ſupinum molliore folio* IUSSI. Acad. *ſcien. Paris* 1714 ad noſtrum Galium pertinent; num eamdem ſtirpem intelligat Cl. LINNAEUS, dubitari poteſt.

(13) *Galium caule herbaceo, foliis ſenis ſubulatis incurvis, fructibus nigris rugoſis oblongis incurvis.* Hoc eſt *Galium foliis ſenis rigidis obſcure virentibus, floribus purpuraſcentibus e ſummo caule prodeuntibus enum. nic. p.* 4 Nitide, & ſplendide tota planta viret. Folia ſemiteretia margine revoluto ſcabriuſculo, ſed ſcabritie vix tactu percipienda. Primum ſena, deinde 5 aut. 4 folia ſunt. Ad radicem valde ramoſum eſt, ſed rami eriguntur ſoepius ſimplices, panicula florum terminati. Flores, quos in horto olim dedit ſubrubentes, nunc albos praebet.

(14) *Galium caule ſublignoſo, foliis ſenis longe ellipticis, rigidis, ſerrato aculeatis, fructibus ovatis laevibus albeſcentibus.* In vineis *Saurgii*

tenuifolium. * (15)
Valantia muralis. L. *
hiſpida. L.
aparine. L. *
cruciata. L. *
articulata. L.
glabra. L. *
2. *Fl. infunduliformi.*
Crucianella latifolia. *
Spermacoce tenuior. L.

B. GYMNOTETRASPERMAE.

1. *Galea plana.*
a. *Parum fixa.*
Mentha viridis. L. *
gentilis. L.
ſylveſtris. L. *
piperita. L.
exigua. L. *
Origanum creticum. L.
onites. L.
Thymus maſtichinus. L.
cephalotos. L.
alpinus. L. *
patavinus. L.
piperella. L. *
pannonicus. * (16)
Hyſſopus nepetoides. L.
lophantus. L.
ſatureja capitata. L.

naſcitur elegans haec *Galii* ſpecies rore glauco obducta, quo deterſo lucide viret, non tamen obſcuro atque intenſo virore. Caules obſcure tetragoni. Folia longe elliptica, in fine ampliora, & alba notabili ſpina praedita. Rami ad angulum rectum ex caule ſolent diſcedere, evidenter articulatis internodiis. Panicula ramos, & caulem terminat extremis pedunculis ſaepe trifloris uno abortiente; ſemina prae reliquis huius generis magna ſordide albeſcentia glabra, ſed ex magna maturitate rugas contrahunt. Non eſt *Galium glaucum L.*, cuius folia linearia ſunt longiora, non patentia, non ſerrato aculeata, ut omittam in *Glauco* ramos potius terminari umbella florum, quam panicula.

(15) *Galium herbaceum procumbens diffuſe ramoſum, foliis ſenis linearibus mollibus, fructibus nigris rugoſis ſubrotundis. Galium foliis ſenis rigidis diffuſe rambrum floribus albis e ſummo caule prodeuntibus enum. nic. p. 5* Folia radiatim utique exſtant, ſed rigida non ſunt, mollia, & flexilia, nitida, ſed non ſplendentia linearia, leviter ſerrulata cum ſpinula, ad ramos ſaepe octona. Caules acute quadranguli diffuſe ramoſi, ſingulis ramis panicula florum terminatis. Pedunculi biflori.

(16) *Thymus foliis ellipticis hirſutis* HALL. *hiſt.* 236.

b. *Profunde ſecta.*
Lavandula ſtaechas. L. *
Syderitis montana. L. *
ſyriaca. L.
canarienſis. L.
hyſſopitolia. L. *
cretica. L.
Marrubium alyſſon. L. *
candidiſſimum. L.
criſpum. L.
2. *Galea concava.*
Lamium garganicum. L. *
maculatum. L. *
laevigatum. L. *
Stachys maritima. L.
recta. L. *
annua. L. *
Dracocephalon peregrinum. L. (17)
ruyſchiana. L. *
virginicum. L.
thymifora. L.
Leonurus tartaricus. L.
ſibiricus. L.
Phlomis herba venti. L.
niſſolii. L.
nepetella L.
Prunella hyſſopifolia. L. *
Cleonia lutitanica. L.
Praſium majus. L.
Ballota alba. L.
ſuaveolens. L.
Betonica alpina. (18)
danica. (19)
Nepeta nepetella. L. * (20)
italica. L.
tuberoſa. L.
violacea. L.
hirſuta. L.
lanata. J.
Meliſſa cretica. L.
Horminum virginicum. L.
pyrenaicum. L. *
Scutellaria peregrina. L. (21)
lateriflora. L.
alpina. L. *

(17) *Dracocephalon foliis ex lanceolato linearibus, rarius dentatis ſpinuloſis floribus gemellis Martini.* HALL. *gott. p. 335, & Miſc. Taur. p. 52.*
(18) *Betonica foliis ovatis rotunde crenatis, ſpica ovata compacta* HALL. *hiſt. n. 265 Betonica foliis hirſutis floribus purpureis ampliſſimis* ZANON *hiſt. p. 46 t. 30, & Miſc. Taur. p. 52.*
(19) *Betonica maior danica* PARK *theſ. 615.*
(20) *Cataria tenuifolia* CLUS. *hiſt. xxxiii, & Miſc. Taur. p. 52.*
(21) *Caſſida caule quadrangulo rubente teucrii ſerrato folio fl. caeruleo labro albo* TILLI *pis, & Miſc. Taur. p. 52.*

3. *Galea nulla seu flore unilabiato.*

Teucrium campanulatum. L. (22)
hircanicum. L. (23)
iva. L. *
fruticans. L. *
lucidum. L. *
Ajuga orientalis. L.

C. MONANGIAE.

Browalia elata. L.
Scoparia dulcis. L.
Capraria gratioloides. L. (24)
Tozzia alpina. L. *
Hebenstretia dentata. L.

D. DIANGIAE.

1. *Corolla non labiata.*

Plantago media. L. *
alpina. L. *
indica. L.
maritima. L.
albicans. L. *
lusitanica. L.
serpentina. L. * (25)
Cuscuta europaea.

2. *Corolla labiata.*

a. *Calyce quadrifido.*

Euphrasia odontites. L. *
lutea. L. *

b. *Calyce quinquefido.*

Pedicularis tuberosa. L. *
flammea. L. *
palustris. L. *
hirsuta. L. *
comosa. L. *
rostrato spicata. C. * (26)
Antirrhinum orontium. L. *
alpinum. L. *
arvense. L. *
bellidifolium. L. *
supinum. L. *
aegyptiacum. L.

(22) *Teucrium supinum palustre apulum glabrum foliis laciniatis fl. albo.* D. *Michelii* TILLI *pis. Misc. Taur. Tom. II. p.* 53.

(23) *Teucrium foliis cordatis crenatis petiolatis, spicis oblongis densissimis ex Hircania Martini.* HALL. *comm. Gotting.* 1752, *& Misc. Taur. Tom. II. p.* 53.

(24) Haec est *Lindernia* a me descripta *Misc. Taur. Tom. III. p.* 178, quam a *Caprariae* genere differre demonstravi.

(25) *Plantago gramineo folio maior* TOURN. *inst.* 127, quae mihi videtur ab *alpina*, *coronopo.*, aliisque distinguenda.

(26) Celeb. LINNAEUS nostram, quae est *rostrato spicata* Cl. CRANZII, refert ad *incarnatam* in speciebus plantarum, sed notae huic tributae nostrae adamussim non respondent.

geni-

geniſtifolium. L. * (27)
elatine. L. *
Scrophularia lucida. L. *
ſambucifolia. L.
ſcorodonia. L. *
fruteſcens. L.
peregrina. L. *
auriculata. L.
Digitalis purpurea. L.
obſcura. L.
canarienſis. L.
grandiflora * (28)
parviflora * (29)
Gratiola officinalis. L. *
Erinus alpinus. L. *
Chelone glabra. L.
Martynia annua. L.
Bignonia capreolata. L.
Lantana aculeata. L.
Ruellia clandeſtina. L.

V. PENTASTEMONES.

A. MONOSTYLE.

1. *Gymnomonoſpermae.*

Seſamum indicum. L.
Plumbago zeylanica. L.
Baſella alba. L.
Mirabilis longiflora. L. (30)
dichotoma. L.

2. *Gymnotetraſpermae.*

a. *Squamulis in fauce.*

Anchuſa ſempervirens. L.
undulata. L.
anguſtifolia. L. *
Borago officinalis. L.
indica. L.
africana. L.
Cynogloſſum cheirifolium. L.
apenninum. L.
virginicum. L.

b. *Fauce nuda.*

Pulmonaria officinalis. L. *
anguſtifolia. L. *
Cerinthe major. L. *
Onoſma echioides. L. *
Echium creticum. L. *
violaceum. L.
Heliotropium peruvianum. L.
Myoſotis nana * (31)

(27) *Geniſtifolium ab antirrhino linaria* vere differre non puto.
(28) *Digitalis lutea magno flore* BAUH. *pin.* 244.
(29) *Digitalis flore minore ſubluteo anguſtiore folio.* BAUH. *hiſt. II. p.* 814. Hae duae ſtirpes revera inter ſe differunt, ita ut duas diſtinctas ſpecies conſtituant, ſicuti recte monet in *hiſtoria plantarum* Celeb. HALLER.
(30) *Mirabilis foliis viſcidis villoſis, tubo floris cylindrico villoſo foliis longiore* ZINN. *comm. gotting. Tom. V., & Miſc. Taur. p.* 14.
(31) *Echium ſcorpioides alpinum nanum ſupinum* BOCC. *mus. pag.* 149 *T.* 107.

3. *Monangiae.*

a. *Valvis duabus.*

Anagallis latifolia. L.
Menyanthes nymphoides. L. *

b. *Valvis quinque.*

Soldanella alpina. L. *
Androsace maxima. L.
lactea. L. *
Diapensia helvetica L. * (32)
Aretia alpina L. *
punctata. * (33)
Azalea procumbens L. *
Hottonia palustris L. *
Cortusa matthioli L. *
Coris monspelienſis L. *

c. *Valvis decem.*

Primula farinosa L. *
hirsuta. * (34)
Lysimachia ephemeron L.
linum stellatum L. *
nemorum L. *

4. *Diangiae.*

Spigelia anthelmia L.
Vinca rosea L.
Datura metel L.
fastuosa L. (35)
ferox L.
Hyoscyamus aureus L.
Nicotiana rustica L.
glutinosa L.
fruticosa L.
Verbascum arcturus L.
thapsoides L. *
Ipomea pes tigridis L.
tamnifolia L.
violacea L.
bona nox L.
lacunosa L.
tuberosa L.
curassavica. (36)
Evolvulus alsinoides L.
linifolius L.

5. *Tri-aut Pentangiae.*

Convolvulus lineatus L. (37)
cantabrica L. *
scammonia L.

(32) *Diapensia helvetica* L. cum *Androsace lactea* omnino ad ARETIAE genus pertinent.

(33) *Aretia foliis crassis rugosis gramineis, scapis multifloris* HALL. *hist. n.* 619 *t.* 17.

(34) *Primula foliis ciliatis dentatis, scapo paucifloro* HALL. *hist. n.* 613.

(35) *Stramonium aegyptiacum flore pleno intus albo foris violaceo* TOURNEF. *inst. p.* 118 *Misc. Taur. Tom. II. p.* 55.

(36) *Convolvulus scammonii folio subrotundo flore albo umbone nigro curassavicus* HERM. *par. bat. cat. p.* 6.

(37) *Convolvulus serpens maritimus spicaefolius* TRIUMF. *obs. p.* 91, & *Misc. Taur. p.* 55.

umbellatus L.
ſoldanella L.
cneorum L.
purpureus L.
batatas L.
pes caprae L.
carolinus L.
jalapa L.
Lobelia cardinalis L.
ſiphilitica L.
inflata L.
urens L.
Jaſione montana L. *
Phyteuma hemiſphaerica L. *
orbicularis L. *
pauciflora L. *
ſcheuchzeri. * (38)
Campanula perfoliata L.
hybrida L. *
rapunculoides L. *
rotundifolia L. *
medium L. * (39)
cervicaria L. *
pyramidalis L.
elatines L. *
ceniſia L. *
alpeſtris. * (40)
rhomboidalis L. *
petraea L. (41)
barbata L. *
Trachelium caeruleum L.
Polemonium caeruleum. L.

6. *Fructu pulpoſo.*

Atropa zanoni. (42)
Nolana proſtrata L.
Solanum mammoſum L.
verbaſcifolium L.
ſanctum L.

(38) *Rapunculus foliis imis longe petiolatis caulinis linearibus integris; bracteis linearibus duabus imis longiſſimis* HALL. *hiſt. n.* 682, ſed ad hanc *Rapunculi* ſpeciem non pertinet *Rapunculus alpinus caeruleus anguſto raro ſubinde dentato folio* MICHELII *Hort. Piſ., & Florent. p.* 40, *&* FERDINANDI BASSII *Comm. Bonon. Tom. IV. p.* 289 *t.* 1 *f.* 2.

(39) *Campanula hortenſis folio, & flore oblongo* BAUH. *pin.* 94 *Miſc. Taur. p.* 55 olim a Cl. LINNAEO cum *barbata* coniuncta.

(40) *Campanula foliis hiſpidis, caule unifloro. Spec. p.* 8 *t.* 8 *f.* 2. Hanc pro varietate *barbatae* habet Cl. HALLER.

(41) *Campanulae glomeratae* inſignis varietas videtur. Ex *M. Baldo* in Hortum Taurinenſem illata planta viva, & culta *glomeratae* omnino ſimilis evaſit.

(42) *Solanum ſpinis carens, melongenae facie, fructu rotundo* ZANON. hiſt. T. 158 Calyx, flos, & fructus, qui eſt pomum biloculare, iubent, ad *mandragorae* genus plantam hanc revocare.

paniculatum L.
carolinenſe L.
radicans L.
virginianum L.
aethiopicum L.
fuſcatum L.
guineenſe L.
diphyllum L.
trilobatum L.
melanoceraſum. (43)
inſanum L.
capſicoides. (44)
Phyſalis pruinoſa L. (45)
viſcoſa L.
Capſicum fruteſcens L.
baccatum L.
Lonicera caerulea L. *
pyrenaica L. *
alpigena L. *
Lycium barbarum L.
Rhamnus frangula L. *
alaternus L. *
alpinus L. *
Sideroxylon ſpinoſum L.

B. DISTYLAE.

Gentiana lutea L. *
cruciata L. *
punctata L. *
pneumonanthe L. *
acaulis L. *
verna L. *
bavarica L. *
Swertia perennis L. *
Stapelia variegata L.

(43) *Solanum guineenſe fructu magno inſtar ceraſi* DILL. *elth.* 336. Haec ſolani ſpecies in vulgare nigrum, cultura numquam abit ab eo diſtincta. Dixi *melanoceraſum*, *ut guineenſe* nomen triviale alteri ſtirpi aſſignatum ſervarem.

(44) *Solanum caule aculeato fruticoſo, foliis piloſis, ovatis ſinuato lobatis, pedunculis unifloris.* Elegantis huius ſolani; cuius nullam apud Auctores mentionem video, ſemina ad me miſſa hoc anno fuerunt a Cl. Guatteri Parmenſi bot. Prof. ſub nomine *ſolani capſicoidis ex h. Patavino.* Tota planta ſpinoſa eſt caule, foliis, ramis, petiolis, pedunculis, & calyce. Caules rotundi ramoſi ſaepe longis tenuibuſque pilis inſtructi. Folia lucide virent & iuniora undique piloſa, ſubtus aculeata; ſupra ad coſtam unam alteramque ſpinulam habent. Flos albus patens, non tamen rotatus, magnus, pendulus, quem ſequitur magnus fructus laeviſ croceus; e caule infra folium unus aut alter pedunculus naſci ſolet.

(45) *Alkekengi barbadenſe nanum alliariae foliis* DILL. *elth. p.* 10, *& Muſc. Taur. p.* 56.

hirſuta L.
Cynanchum monſpeliacum L.
aphyllum L.
Aſclepias nigra L.
nivea L.

VI. HEXASTEMONES.

Aloe carinata (46)
Verucoſoſpinoſa (47)
ſuccotrina. (48)
maculata. (49)
glauca. (50)
margaritifera L. (51)
Hyacinthus muſcari.
comoſus L. *
ſerotinus L.
botryoides L. *
Aſphodelus luteus L.
fiſtuloſus L.
ramoſus L. *
Convallaria bifolia L. *
Dracaena draco L.
Ariſtolochia longa.

VII. OCTOSTEMONES.

Daphne gnidium L. *
Dioſpyros virginiana L.
Vaccinium oxycoccos L.
myrtillus L. *
vitis idaea L. *
uliginoſum L. *

VIII. ENNEASTEMONES

Rheum compactum L.

IX. DECASTEMONES.

Cotyledon orbiculata L.
Jatropha goſſypifolia L.
curcas L.
Adoxa moſchatellina L. *

(46) *Aloe Africana ſeſſilis foliis carinatis verrucoſis* DILL. *elth. p.* 10.
(47) *Aloe Africana humilis, ſpinis inermibus, & verrucoſis obſita* Comm. *prael. p.* 77.
(48) *Aloe ſuccotrina anguſtifolia fl. purpureo* Comm. *hort.* 1. *p.* 91.
(49) *Aloe Africana calcſcens foliis ſpinoſis, maculis ab utraque parte albicantibus notatis* Comm. *hort.* 11 *p.* 9.
(50) *Aloe Africana foliis glaucis margine, & dorſi parte ſuperiore ſpinoſis fl. rubro* Comm. *prael. p.* 75.
(51) *Aloe Africana folio in ſummitate triangulari margaritifera flora ſubviridi* Comm. *hort.* 11 *p.* 10.

Pro varietatibus aliarum aloes ſpeciebus habet Cl. LINNAEUS, ſed mihi videntur conſtanti foliorum forma, habitu atque etiam floribus diſtinctae ſpecies, quas in Horto Gottingenſi diſtinxit Cl. HALLER.

Anacardium occidentale L.
Arbutus unedo L. *
uva urſi L. *
alpina L. *

X. POLYSTEMONES.

Mimoſa plena L.
aſperata L.
caſta L.
nilotica L.
arborea L.
Poterium ſanguiſorba L. *
hybridum L.
ſpinoſum L.
Styrax officinale L. *

CLASSIS II.

Plantae flore monopetalo floſculoſo.

I. ANTHERIS DISJUNCTIS

Dipſacus ſativus.
Scabioſa cretica L.
ucranica L. (52)
tranſylvanica L. *
prolifera L.
gramuntia L.
africana L.
ſilvatica L. *
palaeſtina L.
marilandica. (53)
Globularia cordifolia L. *
alypum L. *
nudicaulis L. *
Cephalanthus occidentalis L.

(52) *Scabioſa foliis planis carnoſis, inferioribus pinnatis, ramorum integerrimis linearibus* GMEL. *lib. II. p.* 213, *& Miſc. Taur. p.* 38.

(53) Hoc nomine ex Anglia primum, deinde etiam ab amico optimo Ioh. MARSILLI Bot. Prof. Patavino miſſa ſcabioſa eſt diffuſe ramoſa ſimilis ucranicae, ſed ab ea vere differens. Humilior eſt foliaque habet omnia pinnata. Flores uniformes vix inaequales ſegmentis erectis, quinquefidi, breviores calyce floris, qui petiolatus eſt in quinque ariſtas rigidas rubentes florem ſuperantes diviſus. Calix fructui immediate impoſitus membranaceus planus 5 dentatus, & dentibus longe ariſtatis. Eſt ne *ſcabioſa divaricata* Cl. JACQUIN in horto Vindobonenſi? Decernere non licet cum ſplendidum hoc opus nondum poſſideam. Noſtrae feminibus reſpondent ſemina ab hoc Illuſtri viro ſub hoc nomine accepta, quae in horto ſata non germinarunt.

Parthenium hyſterophorus L.
Ambroſia triſida L.
elatior L.
maritima L. *
peruviana. (54)
Xanthium ſtrumarium L. *

II. ANTHERIS COALITIS.

A. Capitatae.

Sphaeranthus indicus L.
Onopordon arabicum L.
acaulon L.
Cynara humilis L.
cardunculus L.
Arctium carduelis L.
Carduus ſyriacus L.
paluſtris L. *
tuberoſus L. *
tataricus L. *
caſabonae L.
ſerratuloides L. *
acaulis L. *
defloratus L. *
pyrenaicus L. *
eriſithales J. *
Serratula glauca L.
coronata L. *
centauroides L.
babylonica L.
Carthamus lanatus L. *
Atractylis cancellata L. *
Cnicus cernuus L.
oleraceus L. *
Carlina acanthifolia. * (55)
lanata L. *
Centaurea glaſtifolia L.
orientalis L.
phrygia L. *
argentea L.
ſicula L.
ſplendens L. *
alpina L. *
nigra L. *

(54) *Ambroſia caule perenni fruticoſo, foliis ſubtus tomentoſis bipinnatis, pinnulis pinnatifidis, exterioribus majoribus.* Jam decem abhinc annis in h. T. vivit fragrantiſſima haec Ambroſiae ſpecies, cujus ſemina *Ambroſiae peruvianae* nomine tranſmiſit Cl. Bernardus Juſſiaeus.

(55) *Carlina acaulis foliis tomentoſis ſemipinnatis, plicatis, pinnis ſemi bilobis pungentibus.* In alpibus valdenſium frequens eſt haec Carlinae ſpecies Acaulis uniflora, magnum habens florem, cujus lucidae ſquamae albae ſunt. Folia onopordi. Ejus integram deſcriptionem dabo in Enum. ſtirpium Pedemontii. Nequit eſſe *pyrenaica* L., cui Cl. Auctor caulem tribuit multiflorum, atque folia decurrentia.

sempervirens L. *
rhapontica L. *
cineraria L.
conifera L. *
amara L. *
benedicta L.
uniflora L. *
lippi L.
pullata L.
triumfetti (56)
tingitana L.

B. Discoideae.

1. *Semine nudo.*

Carpesium cernuum L. *
Tanacetum crithmifolium L.
Cotula grandis L.
turbinata L.
aurea L.
Artemisia arborescens L.* (57)
annua L.
rupestris L. *
glacialis L. *
crithmifolia L.
vallesiaca * (58)
lobelii * (59)
Filago germanica L. *
leontopodium L. *
2. *Semine pappis coronato.*
Gnaphalium sylvaticum L. *
orientale L.
undulatum L.
luteo-album L. *
obtusifolium L.
uliginosum L. *
supinum L. *
alpinum L. *
Chrysocoma linosyris L. *
coma aurea L.
cernua L.
Eupatorium Chinense L.
Conyza squarrosa L. *
saxatilis L. *
rupestris L.
Baccharis ivaefolia L.
Tussilago alpina L. *
frigida L. *
alba L. *
3. *Sem. aristis coronato.*
Ageratum altissimum L.

(56) *Cyanus alpinus maior foliis incisis* Triumf. *obs. p. 26. A Centaurea montana* differt non modo foliis constanter profunde pinnatifidis; verum etiam ciliis squamarum albis, quae nigra in *montana* sunt.

(57) *Absinthium arborescens* Lob. *ic.* 753, & *Misc. Taur. p.* 58.

(58) *Artemisia foliis tomentosis multifidis, floribus erectis longe spicatis pene sessilibus* Hall. *hist. n.* 128.

59) *Abrotanum odoratum humile dense fruticosum* Lob. *ic.* 769.

cony-

conyzoides L.
Xeranthemum annuum L. *
Bidens bullata L. * (60)
Spilanthus oleraceus L.
Athanaſia annua L.
crithmifolia L.

C. RADIATAE.

1. *Sem. nudo.*

a. *Placenta paleacea.*

Helianthus tuberoſus L.
divaricatus L.
Buphthalmum aquaticum L. *
ſpinoſum L. *
maritimum L. *
ſalicifolium L. *
Silphium perfoliatum L.
alternifolium. (61)
Siegerbeckia occidentalis L.
Achillea magna L. *
macrophylla L.
erba rotta. * (62)
atrata. *
liguſtica. * (63)
Anthemis cota L.
cotula L. *
valentina L.
Anacyclus valentinus L. *
creticus L.

b. *Placenta nuda.*

(60) *Bidens foliis ovatis, & tripteris, caulibus hirtis brachiatis* HALL. *gott. p. 383., & Miſc. Taur. p. 59.*

(61) *Silphium foliis alternis, ovatis, ſinuatodentatis, ſubtus aſperis, radicalibus longiſſime petiolatis.* Altitudine ſua, & florendi forma ad *perfoliatum* accedit, ſed pluribus differt, quod ad fructificationem ſimile. Semifloſculos habet aureos bidentatos, & calycem floris ex ſquamis trium ordinum omni ex parte appreſſis, cum in *perfoliato* duorum ordinum ſint, & in ſummo ſolutae, & reflexae. Caulis in *alternifolio* teres glaber: ſemina radii in *alternifolio* duabus ariſtis inſtructa.

(62) *Achillea foliis cuneiformibus, integris odoratis, in apice dentatis ſpec. pedem. Tom. II. f. 4.*

(63) *Achillea foliis pinnatis, pinnis acute pinnato dentatis, planis, glabris.* In maritimis Liguriae provenit perennis haec achilleae ſpecies. Caules ſunt ſublignoſi, cubitales, folioſi, & ramoſi, ſtriati, glabri aut ſubhirſuti. Folia caulina, & maiora pinnata pinnulis aequaliter cum nervo confluentibus; ramea ſimpliciter pinnato dentata, dentibus plerumque ſimplicibus, qui in caulinis maioribus ſaepe dentem unum acceſſorium habent. Flores in extremis ramis umbellati albi. Semifloſculi albi tridentati cordati. Odore vehementi *Achillae agerati* donatur.

Milleria quinqueflora L.
Othonna cheirifolia L.
Polymnia uvedalia L.
Calendula pluvialis L.
hybrida L.
Chryſanthemum alpinum L. *
millefoliatum L.
italicum L. (64)
2. *Sem. pappis coronato.*
Aſter amellus L. *
tenellus L.
acris L. *
divaricatus L.
annuus L.
radeſcanti L.
Inula crithmifolia L. *
ſalicina L. *
montana L. * (65)
bifrons L. *
oculus chriſti L. *
Erigeron bonarienſe L.
acre L. *
phyladelphicum L.
ſiculum L.
alpinum L. *
viſcoſum L. *
foetidum.
Senecio aegyptius L.
doria L.
viſcoſus L. *
doronicum L. *
elegans L.
ſylvaticus L. *
lividus L.
byzantinus L.
ſiculus. (66)
Solidago uniflora. * (67)
flexuoſa L.
alpina L. *
Arnica montana L. *
ſcorpioides L. *
cluſii. * (68)
Doronicum bellidaſtrum L. *
3. *Sem. ariſtis coronato.*
Arctotis triſtis L.
Zinnia multiflora L.
pauciflora L.
Verbeſina alata L.
pſeudoacmella L.
acmella L.
nodiflora L.
Coreopſis leucanthema L.
bidens L. *
tripteris L.

(64) *Chryſanthemum italicum* Linn. *ſiſt. nat. n.* 10, & *Chryſanthemum achilleae n.* 22 unam, & eamdem ſtirpem conſtituunt.
(65) *Aſter montanus hirſutus* Lob. *ic.* 350, & *Miſc. Taur. p.* 60.
(66) *Iacobea ſicula chryſanthemi facie* Bocc. *rar. p.* 66.
(67) *Solidago foliis tomentoſis ovatis, & ſemipinnatis* Hall. *hiſt. n.* 70.
(68) *Arnica foliis ovatis alternis integerrimis* Hall. *hiſt. n.* 91.

lanceolata L.

D. PLANIPETALAE.

1. *Sem. nudo.*

a. *Placenta. nuda.*

Lapſana zacintha L. *

b. *Placenta paleacea.*

Scolymus hiſpanicus L. *

2. *Sem. pap. aut ariſtis coronato.*

a. *Placenta nuda.*

Leontodon hirtum L. *

Hieracium aurantiacum L. *
dubium L. *
kalmi L.
ſabaudum L. *
paludoſum L. *
villoſum L. *
cerinthoides. * (69)
glaucum * (70)
ſtaticifolium * (71)
taraxaci L. *
intybaceum. * (72)

Crepis ſibirica L.
alpina L. *
rubra L.
biennis L. *
pulchra L. *
dioſcoridis L. *
auſtriaca L. * (73)

Hyoſeris hedypnois L.

(69) Vere differt a HIERACIO *villoſo* I. cui caeteroquin ſimile eſt. Foliorum ſuperior ſuperficies glabra, & in ambitu tantum piloſa Calyx fere calyculatus, ex ſquamis linearibus acutis in apice compoſitus, nigris brevibus denſiſque pilis hirtus, non habens villum ſericeum, uti *Hieracium villoſum* L.

(70) *Hieracium foliis lanceolatis glaucis, caule brachiato multifloro* HALL. em. 11 n. 96. A ſequenti omnino eſt diſtinguendum, folia longiſſime elliptica acuto fine, glauca, obiter denticulata, ambitu, & coſta piloſa. Calyx ovatus, ex ſquamis multorum ordinum denſe appreſſis, viridibus, in ambitu tomento albicantibus: ſemina aliquantum incurva, oblonga, ſtriata, coronata pappo ſimplici ſeſſili.

(71) *A porrifolio* L., & *glauco* ſeparandum. *Porrifolii* iconem, & deſcriptionem dedit Cl. IACQUIN. *Staticifolium* folia habet remote, et obiter denticulata, concava, fere linearia, nunquam piloſa. Rami, & pedunculi ſatis ſquamoſi. Calyx calyculatus ad baſim, ſquamis parvis fere capillaribus. Calyx verus e unico ordine ſquamarum viridium dorſo obſcurius virente.

(72) *Hieracium foliis oblongis, aſperis, lanceolatis, dentatis, calyce hirſutiſſimo Hall. hiſt. n. 41.*

(73) *Eſt Hieracium Pyrenaicum* L. *β. γ. δ.*

radiata L.
cretica L. *
ſcabra L.
lucida L.
Sonchus paluſtris L. *
tenerrimus L. *
alpinus L. *
arvenſis L. *
floridanus L.
Prenanthes purpurea L. *
altiſſima L.
Lactuca canadenſis L.
ſcariola L. *
ſaligna L. *
auguſtana. * (74)
Scorzonera picroides L. *
graminifolia L.
Tragopogon picroides L.
porrifolium L. *
crocifolium L. *
dalechampii L. *
lanatum L.
Geropogon glabrum L. *
hirſutum L. *

b. *Placenta ſquamis diſtincta.*

Seriola aethnenſis L. *
Hypochaeris radicata L. *
Catananche lutea L.

c. *Placenta villoſa.*

Andryala integrifolia L. *
ſinuata L.
lanata L. *

CLASSIS III.

Plantae flore dipetalo.

Circaea alpina L. *
Callitriche verna L. *
autumnalis L. *
Muſa paradiſiaca L.

CLASSIS IV.

Plantae flore tripetalo.

Commelina erecta L.
communis L.
Phoenix dactylifera L.
Hydrocharis morſus ranae. L. *
Stratiotes aloides L.
Aliſma parnaſſifolia L. *
ranunculoides L. *
Sagittaria ſagittifolia L. *
Triglochin paluſtre L. *
Empetrum nigrum L. *

(74) *Lactuca foliis integris, dentatis, acute hamatis, coſta laevi.* Naſcitur in valle *Auguſtae praetoriae.* Niſi fuerit *Lactuca longo, & valde anguſto folio* BAUH. *hiſt.* 11. *p.* 999. *Sive Lactuca folio oblongo, acuto* BAUH. *pin.* 123. non memoratur, *ſed* BAUINORUM brevis deſcriptio, & icon omnino non reſpondent.

CLASSIS V.

Plantae flore tetrapetalo cruciformi.

I. TETRASTEMONES.

Ptelea viſcoſa L.
trifoliata L.
Cornus ſuccica L.
Potamogeton compreſſum L.*
gramineum L. *
perfoliatum L. *
denſum L. *
Trapa natans L. *
Oldenlandia corymboſa.
Ludwigia alternifolia L.

II. HEXASTEMONES.

A. Siliculosae.

Draba aizoides L. *
pyrenaica L. *
hirta L. * (75)
muralis L. * (76)
Lunaria annua L.
Myagrum orientale L.
paniculatum L.
perenne L. *
rugoſum L. *
ſaxatile L. *
Vella fruteſcens L.
annua L.
Iberis rotundifolia L. *
ſaxatilis L. *
pinnata L. *
cretica L.
garexiana * (77)
Alyſſum utriculatum L. *
gemonenſe L.
alpeſtre L. * (78)
campeſtre L. *
argenteum * (79)
Clypeola maritima L. *

(75) Ad hanc ſtirpem referendae ſunt *Draba auſtriaca* L., *ſtellata*, *incana* L., & Oed. *ic.* 242. Folia enim pro locorum varietate modo integerrima ſunt, hirſuta, aut tomentoſa; alias autem ampliora, pene glabra, & dentata.

(76) *Myagroïdes ſubrotundis ſerratis foliis*, *fl. albo* Barrel. *ic.* 816.

(77) *Iberis perennis foliis linearibus*, *obtuſis*, *integerrimis*.

(78) *Clypeola perennis incana*, *foliis ſubrotundis*, *calyce deciduo*, *ſiliculis ovato acutis Miſc. Taur. p.* 62. 55.

(79) *Alyſſum argenteo folio*, *floſculis luteis*, Zan. *hiſt. p.* 16. *Differt ab Alyſſo montano*, cui proximum eſt, caule annuo ramoſo, habitu ramoſo erecto, foliis ſupra viridibus, petalis ovatis non inciſis, fructu ſubrotundo plano non emarginato, ſemine

Peltaria alliacea L. *
Cochlearia draba L. *
Lepidium ruderale L. *
virginicum L.
alpinum L. *
perfoliatum L.
petraeum L. *
ſpinoſum A. (80)
cardamines L.
Thlaſpi perfoliatum L. *
montanum L. *
alpeſtre L. *
Biſcutella auriculata L. *
didyma L. *
Anaſtatica hierochuntica L.
Bunias cakile L. *
aegyptiaca L.
balearica L.

B. Siliquosae.

Iſatis luſitanica L.

Ricotia aegyptiaca L. (81)
Dentaria pentaphyllos L. *
bulbifera L. *
Sinapis laevigata L. *
pubeſcens L.
erucoides L.
braſſicata L.
juncea L.
pyrenaica L. *
incana L.
orientalis.
Braſſica erucaſtrum L. *
eruca L. *
alpina L. *
Arabis alpina L. *
pendula L.
turrita L. *
canadenſis L.
bellidifolia L. *
caerulea. * (82)
ſcabra. * (83)

marginato membrana phaenicea, plano. *Alpeſtre* autem humilius argenteo eſt, & decumbit, atque perenne eſt cauliculis plurimis ſimplicibus, habet folia magis rotunda, ſiliquam ovato acutam drabae inſtar, aliquantum tumentem, ſemina non marginata.

(80) Eſtne *Lepidium didymum* L.?

(81) *Lunaria foliis pinnatis, foliolis laciniatis*, Roy. *Leid. 33., et Miſc. Taur. II. p. 62. n. 57.*

(82) *Leucojum foliis oblongis, dentatis, ſpica nutante* Hall. *hiſt.* 445. Tum haec, cum bellidifolia ad Arabis genus non videntur pertinere.

(83) *Arabis multicaulis foliis radicalibus, ſcabris, dentatis, dentibus ciliatis.* Hall. *hiſt. n.* 453.

Cardamine impatiens L. *
parviflora L. *
reſedifolia L. *
aſarifolia L. *
amara L. *
bellidifolia L. *
Heſperis africana L.
triſtis L.
Cheirantus feneſtralis L.
chius L.
annuus L.
ſinuatus L. *
alpinus L. *
ſilveſtris C. *
triſtis L.? * (84)
Eryſimum officinale L. *
barbarea L. *
repandum L.
Siſymbrium polyceratium L.
tenuifolium L. *
ſylveſtre L. *
orientale L.
pyrenaicum L. *
monenſe L. *
paluſtre L. *
terreſtre L.
murale L. *
barbareae L.
loeſelii L.
Cleome dodecandra L.
violacea L.
pentaphylla L.
arabica L.
gigantea L.
Gledifia triacanthos L.
inermis L.

III. OCTOSTEMONES.

Oenothera parviflora L.
fruticoſa L.
pumila L.
Gaura biennis L.
Ruta chalepenſis L.
Moerhingia muſcoſa L. *

(84) *Cheiranthus caule ramoſo, diffuſo, foliis linearibus acutis, ſinnato dentatis, petalis linearibus criſpis.* Totaplanta aſperinſcula eſt cinereo incana, & caulibus ramoſis fere decumbit. Folia ſunt concava duobus, aut tribus dentium paribus pinnata, & ſinuata, ramea uno alterove dente notantur, demum integerrima. Rami in longo racemo florigeri floribus alternis ſeſſilibus. Calyx tubuloſus connivens duobus foliolis baſi gibbis. Petala linearia apice emarginata ſulphureo viridia per aetatem luride purpuraſcentia venoſa venis fuſcis, margine criſpo, denticulato. Siliqua rotunda, toroſula, praelonga apice craſſiori, ſtigmatis diviſione tantum ſignata. Eſt ne vere *Cheiranthus triſtis* L. Sed noſter noctu non triſtem, ſed gratum odorem exhalat, qui accedit ad Geranii triſtis fragrantiam.

Sapindus ſaponaria L.
Elatine alſinaſtrum. *
Myriophyllum verticillatum L. *
ſpicatum L. *

IV. POLYSTEMONES.

A. Monostylae.

Euphorbia peplis L. *
deudroides L. *
characias L. *
pithyuſa L. *
exigua L. *
paralias L. *
epithymoides L.
portlandica L.
linifolia. (85)
Papaver cambricum L.
argemene L. *

B. Polystylae.

Tormentilla reptans L.
Thalictrum cornuti L.
ſimplex L. *
Clematis viticella L.

CLASSIS VI.

Plantae flore tetra-aut pentapetalo papilionaceo.

I. TETRAPETALAE.

A. Hexantherae.

Fumaria veſicaria L.

B. Octantherae.

Polygala chamaebuxus L. *

C. Decantherae.

1. *Uniloculares.*

Trifolium incarnatum L. *
melil. cretica L.
melitotus indica L. *
melitotus minima. (86)
reſupinatum L. *
alpeſtre L. *
ſubterraneum L. *
alpinum L. *
fragiferum L. *
ſtellatum L. *
ochroleucum L. *
apulum. (87)

(85) *Tithymalus lini folio maior Italicus* Barrel. *ic.* 821.
(86) *Melitotus minima, recta lutea, ſiliquis craſſis, curtis in capitulum congeſtis, ſemine foenugraeci* Mor. *ox. n. f.* 17. *f.* 9.
(87) *Trifolium annuum apulum rotundifolium glabrum, foliis alba macula notatis, fl. purpuraſcente, calyce veſicario* Tilli Pis. *tab.* 49. *f.* 4.

ſaxatile

saxatile. (88)
Lotus jacobaeus L.
creticus L.
arabicus L.
peregrinus L. *
angustissimus L. *
maritimus L.
siliquosus L. *
Arachis hypogaea L.
Anthyllis montana L. *
cytisoides L.
Medicago marina L. *
circinata L.
laciniata L.
arborea L.
muricata L. *
Ononis fruticosa L.
minutissima L. *
cherleri L. *
crispa L.
foetens * (89)
columnae * (90)
viscosa L.
alpina * (91)
Cytisus sessilifolius L. *
cajan L.
hirsutus L. *
argenteus L. *
nigricans L. *
supinus L. *
austriacus L.
Genista canariensis L.
germanica L. *
candicans L. *

(88). *Trifolium saxatile hirsutissimum* Bauh. *prodr.* 143. Ex radice caules plures ramosi procumbentes trium, aut quatuor unciarum longitudine. Foliorum vaginae striatae amplexicaules caudatae. Foliola ex ovatis cordata, emarginata, nervosa, denticulata subtus subincana. Capitula florum axillaria, & terminalia, laxa; calyces molli, & denso tomento tecti, non inflati, dentibus rectis, non reflexis. Nascitur in summis alpibus Tarantasiae.

(89) *Ononis spinis carens purpurea* Bauh. *pin.* 329. *Ononis non spinosa* Clus. Constanter inermis, ramis, & calyce praesertim multum villosis. Folia mollia, subtiliter pilosa. Ramos spica florum terminat. Flores gemini petiolati; fructus calyce brevior hirsutissimus. Vexillum reflexum fere planum, carina angulo obtuso inflexa. In ononide vulgari stipulae longe minores, hamatae; fructus minus hirsutus calyce longior, carina floris ad angulum rectum inflexa. Flores solitarii.

(90) *Ononis lutea silvestris minima* Col. *ecphr.* 1. *p.* 304.

(91) *Ononis glabra, inermis, vaginis foliorum crispatis, pedunculis longissimis unifloris spec. ped T. X. f. 3.*

sagittalis. L. *
sibirica. (92)
hypericifolia L. *
radiata L. *
Phaseolus maximus L.
radiatus L.
farinosus L.
Dolichos biflorus L.
lignosus L.
unguiculatus L.
minimus L.
Hedysarum coronarium L. *
caput galli L. *
maculatum L.
junceum L.
alpinum L. * (93)
canescens L.
hirtum L.
gangeticum L.
Vicia pisiformis L. *
onobrichioides L. *
lathyroides L. *
hybrida L.
biennis L.
sepium L. *
cracca L. *
bithynica L. *
Ervum monanthos L.
Orobus pyrenaicus L. *
Lathyrus angulatus L. *
hirsutus L. *
sylvestris L. *
tuberosus L. *
setifolius L. *
odoratus L.
annuus L.
palustris L.
heterophillus L. *
Pisum ochrus L. *
arvense L. *
Colutea frutescens L.
perennans J.
Indigofera psoraloides L.
glabra L.
Erythrina crista galli. L.
corallodendrum L.
Abrus precatorius L.
Aeschinomene tesban. L.
Crotalaria retusa L.
verrucosa L.
incana L.
juncea L.
alba L
Clitoria ternatea L.
Coronilla cretica L.
argentea L.

(92) Indicatur in Catal. plantarum horti Turicensis. Videtur differre a *Genista tinctoria* L. caule perenni, fruticoso, 5. aut etiam sex pedum altitudinem habente.

(93) *Hedysarum alpinum*, & *obscurum* L. unam, eamdemque plantam constituunt.

glauca L.
juncea L.
minima L. *
valentina L.
Ornithopus ſcorpioides L. *
compreſſus L. *
perpuſillus L.
Hippocrepis comoſa L. *
multiſiliquoſa L. *
Lupinus varius L.
luteus L.
Scorpiurus vermiculata L. *
muricata L. *
Phaca alpina L. *
auſtralis L. *

2. *Biloculares.*

Aſtragalus ſulcatus L.
campeſtris L. *
tragacantha L. * (94)
monſpeſſulanus L. *
boeticus L.
hamoſus L. *
galegiformis L.
cicer L. *
ſeſameus L.
onobrichis L. *
microphyllus L. *
contortuplicatus L.
alpinus L. *
depreſſus L. *

II. PENTAPETALAE.

Spartium ſpinoſum L. *
Pſoralea pinnata L.
glanduloſa L.
paleſtina B. (95)
Cercis canadenſis L.
Anagyris foetida L. *
Caſſia obtuſifolia L.
marilandica L.
tora L.
nictitans L.
emarginata L.
liguſtrina L.
planiſiliqua L.
Poinciana pulcherrima L.

(94) Tragacantham, quae ad maris litus naſcitur, eamdem cum *alpina* plantam eſſe Cl. viri affirmant. Nollem ab his ſummis viris diſſentire, cum non liceat illius cum noſtrare perfecta ſpecimina comparare; reperio folia *maritimae* ſericea eſſe, non hirſuta, minora, & ſubrotunda.

(95) Novam hanc *pſoraleae* ſpeciem debeo praeſtanti, & amiciſſimo viro FERDINANDO BASSIO, qui eam in *Commentariis Bononienſibus* deſcripſit.

CLASSIS VII.

Plantae flore pentapetalo, & Gymnodiſpermae.

A. SEM. AD PLACENTAM COMMUNEM CONJUNCTIS.

Eryngium amethyſtinum L. *
alpinum L. *

B. MANIFESTA UMBELLA.

1. *Sem. gibbis ſtriatis.*

a. *Petalis aequalibus.*

Phellandrium mutellina L. *
aquaticum L. *
Bunium bulbocaſtanum L. *
Liguſticum peregrinum L. *
nodiflorum * (96)
ferulaceum * (97)
Sium nodiflorum L. *
latifolium L. *
Siſon ammi L.
ſegetum L.
amomum L. *
Cicuta viroſa L.
Anethum puſillum. (98)
Cuminum cyminum L.
Selinum ſilveſtre L. *
paluſtre L. *
carvifolia L. *
monnieri L.
Bupleurum odontites L. *
rotundifolium L. *
ranunculoides L. *
ſtellatum L. *
fruticoſum L.

(96) *Angelica alpina ad nodos florida* TOURN. *inſt.* 313.

(97) *Liguſticum alpinum perenne ferulae folio, floribus albis* SEGU. *Veron. II. p.* 41. Noſtram ſtirpem accurate refert icon. cl. SEGUIERII, atque conſentit deſcriptio. Involucrum autem univerſale habere negat cl. SEGUIER., ſed cum facile caduca ſint, veriſimile eſt illud praeſtantem hunc Virum idcirco non adnotaſſe. Habet autem involucrum univerſale, & particulare. Fructus tribus coſtis acutis, ſemialatis in dorſo percurritur. *Liguſticum* SEGUIERII citatum ad SELINUM *carvifoliam* ſuam refert cl. LINNAEUS, ſed huius SELINI nomine aliam a ſtirpe SEGUIERII celeb. LINNAEUM intelligere probant ea pauca, quae ad indicandam ſtirpem afferuntur.

(98) Simile eſt *Anetho graveolenti*, ſed palmaris altitudinis, & puſillum, an mera varietas? Video commemorari in *catalogo plantarum horti Turicenſis.*

gerardi. * (99)
Athamanta cervaria L. *
meum L. *
ſibirica L.
b. Petalis inaequalibus.
Carum Bunius L. *
Seſeli annuum L. *
ammoides L.
elatum L. *
pumilum L. *
hippomarathrum L.
pimpinelloides L. *
montanum *
pratenſe C. *
ſaxifragum L. *
Pimpinella peregrina L.
aniſum L.
Oenanthe crocata L. *
prolifera L.
globuloſa L.
Echinophora ſpinoſa L. *
Conium africanum L.
rigens L.
Ammi majus L. *
copticum L.
Coriandrum ſativum L.
teſticulatum L. *
aquilegifolium. (100)
2. *Sem. gibb. & alatis.*
a. *Alis duabus.*
Angelica atropurpurea L.
b. *Alis quatuor, & ultra.*
Laſerpitium ſimplex L. *
gallicum L. *
mutellinoides C. *
Aſtrantia minor L. *
3. *Sem. planis alatis.*
Paſtinaca lucida L. (101)
Tordylium anthriſcus L. *
officinale L. *
nodoſum L. *
latifolium L. *
Heracleum ſibiricum L.
Ferula communis L. *
nodiflora L. *
Thapſia villoſa L.
garganica L. (102)
4. *Sem. aſperis.*

(99) *Bupleurum involucris, & involucellis pentaphyllis acutis, foliolis lineari ſubulatis* GER. galloprov. p. 23. f. 9.

(100) *Liguſticum alterum Lobelii* DALECH. *hiſt.* 744. Diverſiſſima planta eſt a *Liguſtico auſtriaco*, cuius ſynonimum habetur a cl. LINNAEO *Syſt. nat. p.* 211. Huius iconem, & deſcriptionem dabo in *enum. ſtirp. pedem.*

(101) *Paſtinaca folio quaſi libanotidis latifoliae* BOERH. *ind.* 1. 67., & *Miſc. Taur. p.* 67.

(102) *Thapſia, ſive turbith garganicum ſemine latiſſimo*, BAUH. *hiſt. III.* 2. 50., & *Miſc. Taur. p.* 67.

Caucalis leptophylla L. *
daucoides L. *
latifolia L. *
maritima (103)
5. *Sem. villoſis, nec roſtratis.*
Daucus gingidium L. *
viſnaga L.
muricatus L.
mauritanicus L. *
gumnifer. (104)
Bubon rigidius L.
macedonicum L.
b. *Sem. roſtratis.*
Scandix anthriſcus L. *
auſtralis L. *
Chaerophyllum temulum L. *
coloratum L.
bulboſum L.

CLASSIS VIII.

Plantae flore pentapetalo, nec Gymnodiſpermae.

I. FILAMENTIS IN UNUM TUBUM CONJUNCTIS.

Waltheria indica L.
americana L.
Hermannia hyſſopifolia L.
Melochia pyramidata. L.
corchorifolia L.
Geranium vitifolium L.
carolinianum L.
macrorhizum L.
ciconium L. *
althaeoides L. *
papilionaceum L.
phaeum L. *
columbinum L. *
groſſularioides L.
peltatum L.
aceroſum L.
moſchatum L. *
rotundifolium L. *
hybridum L.
coriandrifolium L.
maritimum L.
diſſectum L. * (105)
ſibiricum L.
Sida eriſpa L.
criſtata L.
rhombifolia L.
occidentalis L.
periplocifolia L.
alnifolia L.

(103) *Caucalis involucro univerſali diphillo, partialibus pentaphillis* GER. *galloprov. p. 237. f. 10.*

(104) *Daucus maritimus lucidus, gummifer* TOURN. *inſt. 308. Paſtinaca tenuifolia, lucida, gummi manans,* BOCC. *muſ. 2. p. 30. f. 20.*

(105) *Geranium foliis ad nervum quinquefidis, pediculis brevioribus, caule erecto,* HALL. *helo. p. 366., & Miſc. Taur. p. 67.*

indica L.
asiatica L.
umbellata L.
americana L.
triquetra L.
Malachra capitata L.
Napaea hermaphrodita L.
Alcea ficifolia L.
Malva capensis L.
peruviana L.
americana L.
coromandeliana L.
parviflora L.
moschata L. *
sherardiana L.
aegyptiaca L.
crispa L.
limensis L.
Lavatera triloba. L. *
micans L.
olbia L *
cretica L.
Gossipium hirsutum L.
barbadense L.
arboreum L.
Urena lobata L.
Pentapetes phoenicea L.
Hibiscus moscheutos L.
sabdariffa L.
manioth L.
trionum L.
cannabinus L.
ficulneus L.
pentacarpos L.
malvaviscus L.
spinifex L.
laevis. (106)
autumnalis. (107)

(106) *Hibiscus glaber, foliis trilobis hastatis, fructu cylindrico calyce breviori, seminibus hirsutis.* Radix perennis, ex qua caules herbacei purpurascentes humanae altitudinis, flores singulares ex summis alis foliorum *hibisco syriaco* similes, pedunculi petiolis aliquantum longiores. Calyx exterior ex 13., aut 14. foliolis, interior inflatus campanulatus ad $\frac{1}{3}$ quinquefidus. Fructus quinquelocularis polyspermus.

(107) *Hibiscus caule herbaceo foliis ovatohastatis, asperis, calyce interiori tubulato, fructus apice recto.* Similis est *hibisco palustri*, sed altius assurgit, & autumno floret, differt foliis non laevibus, neque subtus molli tomento albicantibus; potius horizontalibus, quam deflexis. Calyx floris interior in *palustri* campanulatus, basi ventricosus, & flos roseus unguibus albis. In nostro flos albus, unguibus purpureis, substantiae firmae, nervosae. Fructus in *palustri* subrotundus, tuberosus, apice intorto, & pli-

II. FILAMENTIS BASI COALITIS.

Hypericum quadrangulum L.*
hirſutum L.*
humifuſum L.*
coris L.*
criſpum L.*
tomentoſum L.*
montanum L.*
hircinum L.
pulcrum L.*
nummularium L.*
elegantiſſimum C.*
Croton argenteum L.

III. FILAMENTIS OMNIBUS LIBERIS.

A. TETRASTEMONES.

Melianthus major L.
minor L.

B. PENTASTEMONES.

1. *Monoſtylae.*

Ribes uva criſpa L.
Ayenia puſilla L.
Viola arboreſcens L.*
arvenſis * (108)
Ruppii * (109)
pinnata * (110)
ceniſia L.*
Impatiens balſamina L.
noli tangere L.*.

2. *Triſtylae.*

Polycarpon tetraphillum L.*
Telephium imperati L.*
Andrachne telephioides L.
Corrigiola littoralis L.
Turnera ulmifolia L.
Tamarix gallica L.*
Clutia pulchella L.*
Rhus toxicodendron L.

cato. Neutram ex his duabus hibiſci ſpeciebus apud Auctores reperire licuit. Primus *virginici*, alter *paluſtris* nomine miſſus eſt.

(108) *Viola bicolor arvenſis* BAUH. *pin.* 200., & *Miſc. Taur. p.* 63. Hanc a tricolori ſejungendam putavi, atque eamdem etiam nunc opinionem teneo, diſtinctamque propoſuit celeber. HALLERUS hiſt. pl. n. 569.

(109) *Viola caule erecto multiſloro, foliis ovato-lanceolatis ſerratis* HALL. *hiſt.* 562.

(110) *Viola pinnata*, quae quotannis ſemina perficit in horto Taurinenſi, imperfecta plerumque petala habet; ſemel autem, atque iterum florem perfectum monſtravit, qui reſpondet deſcriptioni, quam dedit in hiſt. plantarum doctiſſimus HALLER.

glabra

glabra L.
laevigatum L.
Paſſiflora minima.

3. *Pentaſtylae.*

Statice limonium L. * (111)
ſinuata L.
ſpecioſa L.
cordata L. *
Linum tenuifolium L. *
catharticum L. *
maritimum L. *
alpinum L. *
perenne L.
narbonenſe L. *
gallicum L. *
Sibbaldia procumbens L. *
Craſſula tetragona L.
cultrata L.
obvallata L.
portulacaria L. (112)

B. HEXASTEMONES.

Frankenia pulverulenta L.

C. OCTOSTEMONES.

Acer campeſtre L. *
pſeudo-platanus L. *

D. DECASTEMONES.

1. *Monoſtylae.*

Pyrola rotundifolia L. *
uniflora L. *
minor L. *
ſecunda L. *
Rhododendrum ferrugin. L. *
Tribulus ciſtoides L.
Zygophyllum fulvum L.
Melia ſempervirens (113)
Guilandina bonduc L.
Fagonia cretica L.

2. *Diſtylae.*

Dianthus carthuſianorum L. *

(111) *Limonium maritimum majus* BAUH. *pin.* 192. *& Miſc. Taurin. p.* 68.

(112) *Craſſula portulacae facie arboreſcens* DILL. *elth. p.* 120. *t.* 110. *& Miſc. Taur. p.* 69.

(113) *Azedarach ſempervirens, & florens* TOURNEF. *inſt.* 616. habet pro varietate *Azedarach* Cl. LINNAEUS. Obſervo in *Azedarach* pinnas ſemper oppoſitas, folia lucida eſſe acutius, & minus profunde dentata, firmioris ſubſtantiae, fructus rotundos; in *ſempervirenti* pinnas non ſibi ex adverſo reſpondere, magnis dentibus ita profunde ſectas eſſe, ut etiam lobatae videantur, racemum fructuum triplo, & quadruplo longiorem eſſe; fructus ovatos.

glaucus L. *
ſuperbus L. *
alpinus L. *
virgineus L. *
monſpeliacus L. *
Saponaria lutea L. *
Gypſophila perfoliata L.
Saxifraga aſpera L. *
autumnalis L. *
ceſpitoſa L. *
Stellaris L. *
cuneifolia L. *
hypnoides L. *
androſacea L. *
caeſia L. *
multiflora. * (114)
purpurea. * (115)
oppoſitifolia L. *
biflora. * (116)

(114) *Saxifraga foliorum ora cartilaginea, caule triplicato ramoſo, petalis immaculatis*, HALL. *hiſt. n.* 977.

(115) *Saxifraga caule reptante, foliis quadrifariam imbricatis acutis glabris; an faxifraga alpina ericoides fl. purpuraſcente* TOURN. *inſt.*

(116) *Saxifraga foliis imbricatis, ovatis, caulibus reptantibus, bifloris*, HALL. hiſt. n. 981. Hae tres ſaxifragae *oppoſitifolia, purpurea, & biflora*, affines maxime ſunt, diverſas autem tres ſpecies conſtituunt. *Oppoſitifolia*, quae reſpondet *ſaxifragae alpinae, ericoidi fl. ceruleo*, folia habet glabra ciliata, ovata, laxe imbricata, in cauliculis confertiora; petala ovata, lineata, caerulea, aut purpuroviolacea, ſtaminibus fere longitudine petalorum. Ea, quam voco *purpuream* folia habet denſe imbricata in ramis decumbentibus, & in cauliculis florigeris diffita, ſed glabra, apice acuto, & reflexo, caules quadrifloros, aut trifloros fere nudos, ſtylis, & ſtaminibus purpuraſcentibus petala longitudine ſuperantibus, atque haec eſt fortaſſe varietas a Cl. LINNAEO in flora lapponica memorata; petala vivide rubra ſunt, non lineata, ex ovatis longe acuta, parentia. *Biflora* autem, quam deſcripſit Cl. HALLER, & cui reſpondet icon *Oederi tab.* 34. viſcoſa eſt; habet folia non ciliata, ſed villoſa, in ſummis cauliculis potius alterna, quam oppoſita, acumine non reflexo. Flos roſeus, petalis ovatis, acutis, ſtamina tubis multo breviora, quae in oppoſitifolia peralis ſubaequalia ſunt, in purpurea petalis longiora. *Oppoſitifolia* ſolet habere caules unifloros; *biflora* duos plerumque in ſummis cauliculis ſubſeſſiles flores, purpurea tres, aut quatuor umbellatos longe pedunculatos poſſidet. Has omnes ſaxifragae ſpecies cum aliis exhibebo icone *in Enum. ſtirp. Pedemontii.*

muſcoides. * (117)
3. *Triſtylae.*
Arenaria trinervia L. *
tenuifolia L. *
ciliata L. *
tetraquetra L. *
biflora L. * (118)
maritima. * (119)
lanceolata. * (120)
obtuſa. * (121)
flaccida. * (122)
Cherleria ſedoides L. *
Dypis ſpinoſa L.
Stellaria nemorum L. *
graminea L. *
Silene pendula L.
muſcipula L. *
armeria L. *
fruticoſa L.
gigantea L.
noctiflora L. *
antirrhina L.
nocturna L. *
valleſia L. *
cretica L.
virginica L.
ſaxifraga L. *
acaulis L. *
bupleuroides L.
viridiflora L.
polyphylla L.

(117) *Saxifraga foliis mollibus, ellipticis, ſubhirſutis, caule pauciflore,* HALL. *hiſt. n.* 985.

(118) *Alſine caule recto, proſtrato, foliis ovatis,* HALL. hiſt. n. 877.

(119) *Maritima a campeſtri* diſtinctam ſpeciem conſtituit. *Maritima* certe decandra, *campeſtris* pentandria. Flos in maritima major ex petalis ovatis, purpureis, per aetatem albidis, & diu perſiſtentibus, fructus in cornu productus multum extra calycem. Semina leucophaea margine pellucido aucta. In campeſtri fructus vix calyce major, ſemina angulata, obſcura ſine ullo margine, ut alia omittam diſcrimina.

(120) *Arenaria foliis, & calycibus lanceolatis, trinerviis.* Apud auctores rei herbariae deſcriptam non reperi. Radix perennis ceſpitoſa. Cauliculi ex ramis procumbentibus eriguntur digitales, folia oppoſita, erecto patentia glabra raro ſubhirſuta, firma, acuto fine. Calyx ex foliolis ſimilibus, ſed concavis, flos patens albus, calyce paulo major, petalis integerrimis. Stamina decem, antheris purpuraſcentibus.

(121) *Alſine foliis linearibus obtuſis, calycibus viſcidis,* HALL. *hiſt.* 863.

(122) *Alſine caule flaccido dichotomo, foliis linearibus acutis,* HALL. *hiſt.* 864.

niceenſis * (123)
portenſis L.
paradoxa L. (124)
porrigens L. (125)
Cucubalus otites L. *
tartaricus L.
cutholicus L.
4. *Pentaſtylae.*
Coriaria myrtifolia. L. *
Sedum ſtellatum. L. *
acre L. *
daſiphyllum. L. *
reflexum. L. *
anacampſeros. L. *
ſexangulare. L. * (126)
Agroſtemma caeli roſa. L. *
coronaria. L. *
flos jovis. L. *
githago. L. *
Lychnis chalcedonica. L.
flos cuculi. L. *
dioica. L. *
alpina. L. *
Ceraſtium perfoliatum. L.
dichotommum. L.
manticum. L. *
alpinum. L. *
arvenſe. L. *
vulgatum L. *
Forskohlea aegyptiaca. L.
5. *Decaſtylae.*
Phytolacca icoſandra. L.
E. POLYSTEMONES.

(123) *Silene villoſa, & viſcoſa, foliis linearibus obtuſis, petalis ſemifidis, fructibus ovatis, calycibus decemſtriatis.* In agro Niceenſi naſcitur haec ſilene, quae ab auctoribus praeterviſa mihi videtur. Caules infirmi vix erecti. Folia linearia craſſiuſcula ſulcata, caulis de more gentis in pedunculos dichotome finditur. Calyces decemſtriati ſtriis viridibus, non inflati tubuloſi, petala ſemifida coronata ſquamis ſubrotundis extus pallide flavo purpuraſcentia, intus albida, & per diem intus convoluta, ungues pallide luteſcentes. Antherae didymae luteovirides. Styli tres cum ſtigmatibus hirſutis, tota planta villoſa, & viſcoſa eſt.

(124) *Silene viſcoſa alpina, foliis omnibus planis, ac prorſus glabris, petalis anguſtis, intus candidis, extus ex viridi luteolis profunde bifidis, diviſionibus divaricatis linearibus, nectariis exſtantibus, ac tribus longiſſimis purpuraſcentibus ſub ſolo ſpiraliter convolutis,* MANETTI *ſpicil. n.* 1005, *& Miſc. Taur. p.* 69.

(125) Hanc *Gypſophilae chalepenſis*, nomine jamdudum miſit Cl. GOVAN, ſed omnino ad *gypſophilae* genus pertinet.

(126) *Sedum foliis teretibus ternatis, caulibus ſimplicibus trifidis* HALL. *enum. n.* 107, & *Miſc. Taur. p.* 70.

1. *Monoſtylae.*

Portulaca anacampſeros. L.
racemoſa. L.
fruticoſa. L.
Ciſtus laurifolia. L. *
incanus. L. *
monſpelienſis. L. *
ledifolius. L. *
guttatus. L. *
ſerpillifolius. L. *
apenninus. L.
tuberaria. L. *
thymifolius. L. *
polifolius. L. *
aegyptiacus. L.
laevipes. L. *
ſalicifolius. L. *
ladaniferus. L.
roſens. * (127)
arabicus. L.
piloſus. L. *
Triumfletta lappula. L.
ſemitriloba. L.
Corchorus aeſtuans. L.
Capſularis L.
Prunus lauroceraſus. L.
padus L. *
pumila L.
avium L. *
Canadenſis. L.
Amygdalus pumila. L.
Piſidium pyriferum L.

2. *Diſtylae.*

Agrimonia repens. L.
Crataegus azarolus. L.

3. *Triſtylae.*

Reſeda odorata. L. (128)
phyteuma. L. *
undata. L.
Aconitum napellus. L. *
Cammarum. L. *
Delphinium peregrinum. L. * (129)
grandiflorum. L.
Paeonia officinalis. L. *

4. *Pentaſtylae.*

Aquilegia canadenſis. L.
alpina. L. *
Nigella arvenſis. L. *
Meſpylus pyracantha. L. *

(127) *Heliantathemum folio ampliori, fl. roſeo Sherard. Phil. Tranſ. n.* 383. HALL. *gott. p.* 114.

(128) *Reſeda foliis integris, floribus odoratis.* HALL. *gott.* 93, *& Miſc. Taur. p.* 70.

(129) *Delphinium nectaris diphillis, floribus ſolitariis, foliis multipartitis, foliolis lineari acuminatis, enum. nic. p.* 200, *& Miſc. Taur. p.* 81. A *peregrino* olim ſeparavi eo, quod monophylla nectaria *peregrino* tribuiſſet Cl. LINNAEUS. Sed noſtrum eſt vere *peregrinum* Cl. LINNAEI, ut per literas etiam certiorem me fecit.

chamaemeſpilus. L. *
amelanchier. L. *
cotoneaſter. L. *

5. *Polyſtylae.*

Spiraea opulifolia. L.
Helleborus hyemalis. L. *
foetidus. L. *
Potentilla alba. L. *
grandiflora. L. *
cauleſcens. L. *
aurea. L. *
opaca. L. *
penſylvanica. L.
valderia. L. *
intermedia. L. *
norvegica. L. (130)
Geum reptans. L. *
virginianum. L.
Fragaria ſterilis. L. *
Rubus fruticoſus. L. *
ſaxatilis. L. *
Roſa pendulina. L. *
lutea. (131)

CLASSIS IX.

Plantae flore hexapetalo.

I. DIANTHERAE.

Orchis militaris. L. *
maſcula. L. *
coriophora. L. *
latifolia. L. *
abortiva. L. *
Satyrium nigrum. L. *
hircinum. L. *
viride. L. *
Ophrys ſpiralis. L. *
minima. L. *
Alpina. L. *
Serapias latifolia. L. *
grandiflora. L. *
lingua. L. *
longifolia. L. * (132)

II. TRIANTHERAE.

Siſyrinchium bermudiana. L.
Ixia corymboſa. L.
bulbifera. L.
crocata. L.
Wachendorfia thyrſiflora. L.

(130) *Potentilla foliis ternatis, hirſutis, caule recto, umbellifero*, HALL. *gott. p.* 108, *& Miſc. Taur. p.* 224.
(131) *Roſa lutea ſimplex.* BAUH. pin. 636.
(132) *Epipactis foliis enſiformibus, labello obtuſo, per oras plicato*, HALL. *act. helv. t. IV. p.* 111, *& Miſc. Taur. p.* 72.

III. HEXASTEMONES.

Monostylae.

1. *Flore fructui impoſito.*

Hemerocallis flava. L.
fulva. L.
Amaryllis lutea. L.
belladonna. L.
atamaſca. L.
ſarnienſis. L.
Pancratium maritimum. L.
Leucojum vernum. L. *
2. *Flore fructum cingente.*
Alium fiſtuloſum. L.
Schoenopraſum. L. *
ſeneſcens. L. *
oleraceum. L. *
victorialis. L. *
magicum. L.
ampelopraſum. L.
paniculatum. L. *
chamaemelys. L.
pallens. L. *
Fritillaria meleagris. L. *
Uvularia amplexifolia. L. *
Tulipa gallica. L. *
Ornithogalum luteum. L. *
Anthericum annuum. L.
calyculatum. L. *
aſphodeloides. L.
ſerotinum. L. *
liliaſtrum. L. *
Veratrum album. L. *
Albuca major. L.
Medeola aſparagoides. L.
Peplis portula. L. *

IV. POLYSTEMONES.

Lythrum ſalicaria. L. *
hyſſopifolia. L. *

CLASSIS X.

Plantae flore polypetalo.

Cactus curaſſavicus. L.
repandus. L.
ficus indica. L.
melocactus. L.
Meſembryanthemum loreum L.
cryſtallinum. L.
ſplendens. L.
acinaciforme. L.
nodiflorum. L.
noctiflorum. L.
calamiforme. L.
deltoides. L.
barbatum. L.
uncinatum. L.
forficatum. L.
ringens. L.
tortuoſum. L.
Sempervivum arboreum. L.
tectorum. L. *
arachnoideum. L. *
montanum. L. *
Adonis autumnalis. L.
aeſtivalis. L. *
Anemone pulſatilla. L. *

ranunculoides. L. *
alpina. L.
baldenſis. L. *
ſulphurea. L. * (133)
halleri. * (134)
narciſſiflora. L. *
Atragene alpina. L. * (135)
Butomus umbellatus. L. *

CLASSIS XI.

Plantae flore apetalo exceptis graminibus.

I. FILAMENTIS COALITIS.

Thuja orientalis. L.
Pinus ſylveſtris. L. *
pinea. L.
picea. L. *
cembra. L. *
Juniperus ſabina. L. *
oxycedrus. L. *
Taxus baccata. L. *

II. FILAMENTIS DISTINCTIS.

A. Juliferae.

Salix caprea. L. *
reticulata. L. *
herbacea. L. *
retuſa. L. *
Betula alba. L. *
Populus balſamifera. L.
Quercus coccifera. L. *
ilex. L. *

B. Non Juliferae.

1. *Monantherae.*

Hippuris vulgaris. L. *
Blitum virgatum. L. *

2. *Diantherae.*

Fraxinus excelſior. L. *

3. *Triantherae.*

Phillanthus niruri. L.
Ortegia dichotoma. * (136)
Axyris hybrida. L.

(133) *Anemone tubis caudatis, involucris multifidis foliis hirſutis, pinnatis, pinnis acute lobatis* Hall. *hiſt. n.* 1147.

(134) *Anemone tubis caudatis, involucris multifidis, foliis hirſutis, pinnatis, pinnis latis lobatis* Hall. *hiſt.* 1148.

(135) In editis alpium humilis, nec ſcandit. In horto culta trium, & quatuor pedum altitudinem ſcandendo acquiſivit. Non igitur differt *Atragene clematides C.*

(136) *Ortegia dichotoma Miſc. Taur. tom. III. p. 76.* Num *Ortegia dichotoma* noſtra ſit *Hiſpanica* L. ſtatuere nondum ſcio, collata etiam deſcriptione, quam Cel. Linnaeus dedit in poſtrema ſyſtem. nat. editione pag. 74.

Minuartia

Minuartia campeſtris.
Mollugo verticillata. L.
Olyris alba. L. *
4. *Tetrantherae.*
Iſnardia paluſtris. L. *
Hippophae rhamnoides. L. *
Myrica cerifera. L.
Urtica dodartii. L.
pilulifera. L. *
nivea. L.
balearica. L.
divaricata. L.
Alchimilla vulgaris. L. *
alpina. L. *
pentaphyllea. L. *
Illecebrum paronychia. L. *
achyranta. L.
Camphoroſma monſpeliaca. L. *
Rivina humilis. L.
Buxus ſempervirens. L. *
5. *Pentantherae.*
Salſola fruticoſa. L. *
muricata. L. (137)
Theſium linophyllum. L. *
alpinum. L. *
Achyranthes lappacea. L.
indica.
ſicula. (138)
lanata. L.
Herniaria hirſuta. L.
Atriplex roſea. L.
ſibirica. L.
Chenopodium ariſtatum. L. *
viride. L. *
urbicum. L. *
polyſpermum. L. *
album. L. *
auguſtanum. * (139)
Amaranthus hybridus. L.
caudatus. L.
hypochondriacus. L.
graecizans. L.
albus. L. *
ſanguineus. L.
polygonoides. L.
viridis. L.
Beta cycla. L. *
maritima. L. *
Govana domingeriſis. L.
Pharnaceum cerviana. L.
6. *Hexantherae.*
Smilax ſalſaparilla. L. *

(137) *Baſſia Aegyptiaca, Miſc. Taur. tom. III. p.* 178.
(138) *Siculam indicae* varietatem putet Cl. LINNAEUS; ſed mihi diſtinctae ſpecies videntur.
(139) *Chenopodium foliis ſubulatis ſericeis, florum glomerulis geminis,* HALLER. *hiſt. n.* 1375.

Rumex aegyptius. L.
sanguineus. L.
aquaticus. L. *
roseus. L.
luxurians. L.
digynus. L. *
spinosus. L.
arifolius. * (140)

7. *Octostemones.*

Chrysosplenium alternifolium. L. *
Polygonum pensylvanicum. L.
maritimum. L. *
viviparum. L. *
virginianum L.
strictum. * (141)
alpinum. * (142)
Stellera passerina. L. *
Rhodiola rosea. L. *
Trianthema portulacastrum. L.

8. *Decastemones.*

Nyssa aquatica. L.
Datisca cannabina. L.
Scleranthus annuns. L. *
perennis. L. *

9. *Polyantherae.*

Ceratophyllum demersum. L. *
Theligonum cynocrambe. L. *
Mercurialis tomentosa. L.
Dalechampia scandens. L.
Tetragonia fruticosa. L.
Aizoon canariense L.
hispanicum. L.
Glinus lotoides. L.

CLASSIS XII.

Plantae flore apetalo Gramina.

II. TRISTEMONES.

A. Monostylae.

Nardus stricta. L. *
Cenchrus racemosus. L. *
echinatus. L. *
Lygeum spartum. L.
Zea mays. L.
Coix lacryma job. L. *
Cyperus flavescens. L. *
fuscus. L. *
rotundus. L.

(140) *Lapathum acetosum, sexu distinctum, foliis planis, cordiformibus,* Hall. *gott. p.* 16, *& emend.* 1. *n.* 18, *& Misc. Taur. p.* 74. *Historiae autem* Cl. Halleri *n.* 1398.

(141) *Polygonum foliis ovato lanceolatis, glabris, spica strigosa, vaginis ciliatis,* Hall. *hist. n.* 1555.

(142) *Polygonum caule erecto, foliis ovato lanceolatis, subhirsutis, spicis paniculatis,* Hall. *hist. n.* 1564.

papyrus. L.
glomeratus. L. *
ſpadiceo viridis. (143)
Scirpus acicularis. L. *
michelianus. L. *
triqueter. L. *
ſylvaticus. L. *
holoſchaenus. L. *
lacuſtris. L. *
maritimus. L. *
mucronatus. L. *
Eriophorum polyſtachion. L. *
varginatum. L. *
Schoenus mariſcus. L. *
nigricans. L. *
albus. L. *
compreſſus. L. *
Carex dioica. L. *
muricata L. *
remota. L. *
leporina. L. *
veſicaria L. *
flava. L. *
globularis. L. *
atrata. L. *
Typha anguſtifolia. L. *
latifolia. L. *
Sparganium erectum. L. *

B. Distylae.

Phalaris oryzoides. L. *
paradoxa. L. *
utriculata. L. *
Panicum coloratum. L.
capillare. L.
hirtellum. L. *
Phleum arenarium. L. *
pratenſe. L. *
alpinum. L. *
Alopecurus monſpelienſis. L. *
Milium paradoxum. L. *
effuſum. L. *
Agroſtis verticillata. L. *
ſtolonifera. L. *
indica. L.
miliacea. L. *
interrupta L. *
Aira caerulea. L. *
Melica altiſſima L.
Poa alpina. L. *
Gerardi. * (144)
Briza eragroſtis. L. *
Dactylis glomerata. L. *
Cynoſurus aureus. L. *
indicus L.
echinatus L. *
coracan. L.

(143) *Cyperus parvus panicula conglob., ſpicis compreſſis ſpadiceo viridibus Segu. ſupp. p. 66.*

(144) *Poapanicula erecta, ſpiculis trifloris glabris, corollis acuminatis, calyce diplo longioribus* Ger. *galloprov. p. 91.*

Feſtuca amethyſtina. L. *
ovina. L. *
Bromus mollis. L. *
ſquarroſus. L. *
Stipa capillata. L. *
juncea. L. *
Arundo calamagroſtis. L. *
Elymus ſibiricus. L.
canadenſis. L.
Hordeum zeocriton. L.
diſtichon. L.
Triticum hybernum. L.
polonicum. L.
repens. L. *
junceum L. *
AEgilops ovata. L. *
Andropogon hirtum. L. *
Holcus lanatus L. *
ſorghum. L.
ſaccharatus. L.
ſpicatus L.
Tripſacum hermaphroditum. L.
dactyloides. L.

III. HEXASTMONES.

Oryza ſativa. L.
Juncus articulatus. L. *
bufonius. L. *
trifidus. L. *
effuſus. L. *
acutus. L. *
bulboſus. L. *
niveus. L. *
compreſſus. J.
Acorus calamus. L. *

CLASSIS XIII.

Plantae flore imperfecto, ſeu potius inconſpicuo.

Marſilea quadrifolia. L. *
natans. L. *
Marchantia polymorphia. L. *
Lycopodium annotinum. L. *
complanatum. L. *
Equiſetum paluſtre. L. *
fluviatile. L. *
Ophioglooſſum vulgatum. L. *
Oſmunda lunaria. L. *
Acroſticum maranthae. L. *
thelypteris. L. *
Pteris cretica. L. (145)
Aſplenium adiantum nigrum. L. *
Polypodium fontanum. L. *
phegopteris. L. *
regium. L. *
Pteris cretica. L.

(145) *Lingua cervina foliis coſtae innaſcentibus*, TOURN. *inſt.* 544.

REFLE-

JOHANNIS FRANCISCI CIGNA DE ELECTRICITATE.

Quum muneris mei ratio jam longius a generali phyſica me avocet, & temporis mei partem anatome, partem aegrorum cura ſibi vindicet, conſtitui ſubſecivis horis ex adverſariis meis ea depromere, quorum perficiendorum jam pauca ſpes ſupereſſet.

ARTICULUS PRIMUS.

De Symmeriana electricitate.

Menſe aprili anni 1770 quum domum Cl. Marchionis BERSET conveniſſent Equites LOVERA, & DEBUTET, ut experimentis electricis operam darent, ab eorum uno obſervatum eſt phialam, quae onerata fuerat, poſtquam, communicatione oppoſitarum ſuperficierum per arcum deferentem inſtituta, penitus deonerata eſſet, mora, & quiete paucorum minutorum novam ſuccutiendi vim recipere, quae ſi rurſus, inſtituta oppoſitarum facierum communicatione, deleretur, nova iterum poſt aliquod tempus prodiret ita tamen, ut ſuccuſſiones, quae ex ſucceſſive genita electricitate producerentur, pedetentim minores eſſent, ac tandem quocumque temporis intervallo nullae amplius haberi poſſent.

Quum id mihi phaenomenum a Cl. Viris humaniter narraretur, principio paradoxum, ac vix credibile viſum eſt,

quin potius aut prima vice imperfecte deoneratam phialam fuisse, aut alium errorem admissum suspicabar.

Quum vero & phaenomeni veritatem propria observatione perspectam habuissem, & ejus causam animo versarem, demum intellexi experimentum hoc maximam analogiam praeseferre cum alio a me alia occasione proposito, quod nempe si bina vitra in unum juncta, & instar simplicis vitri armata onerarentur, tum, instituta oppositarum facierum communicatione, inductum onus tolleretur, etsi exinde quamdiu juncta vitra persistabant, electricitatis residuae indicia nulla praeberent, si tamen ab invicem divellerentur, valde electrica se ostenderent. (1)

Inde vero colligebam electricitatum, quae in armata vitra congeruntur, partem aliam liberam ad vitrorum superficiem esse, eamque esse, quae, inducta communicatione ad aequilibrium se componens succutiat; partem aliam earum electricitatum altius in vitri poros pervadere, hanc nonnisi lente sive a vitri, sive ab aliorum coërcentium poris se expedire, ideo succutiendo ineptam esse, nec quamdiu vitra juncta persistant ullum sui indicium exhibere, quod oppositae electricitates oppositis vitris inhaerentes se invicem retineant, cohibeantque. Disjunctis vitris, sublataque earum electricitatum in se invicem actione, utramque pedetentim, ac tarde se expedire, sic signa electrica producere, & diuturnam eorum vitrorum tum ad se invicem, tum ad alia corpora adhaesionem efficere. (2)

Itaque concludebam in novo hoc experimento eodem fere modo rem se habere. Electricitatum scilicet, quae in phialam congerebantur, partem eam, quae ad ipsius phialae superficies libera erat, inducta communicatione, se ad aequi-

(1) Miscel. tom. III §. 62.
(2) Ib. §. 69, 70.

librium componere, ac ſuccutere; eam vero, quae altius in vitri poros penetraverat, quaeque eorum reſiſtentia irretita erat, nonniſi lente prodire, prodeuntem in armaturas paullatim colligi, collectam novae ſuccuſſioni efficiendae aptam eſſe.

Ut igitur experimentum iſtud ex noſtra hypotheſi de Symmeriana electricitate in vitri poris deliteſcente feliciter explicatur, ſic viciſſim ab eodem novum argumentum ad eam hypotheſim fulciendam videtur accedere.

Enim vero calore vitrorum Symmerianam electricitatem augeri obſervavi, idque tum tribuebam humori, quem vi caloris expelli arbitrabar; (3) poſtquam vero cognovi ex propriis, & ex variis Anglorum experimentis vitra calore deferentia fieri (4), inde etiam meam illam hypotheſim confirmari deprehendi. Nam prout vitra majori calore magis meabilia fiunt, neceſſe eſt inductam electricitatem facilius, altiuſque in ipſorum poros pervadere, quae quum, frigefactis vitris, pari facilitate ab ipſis erumpere amplius non poſſit, pedetentim prodiens vehementiora Symmerianae electricitatis phaenomena exhibebit.

Viciſſim quo calidiora ſunt vitra, dum onerantur, eo ineptiora ſuccutiendo evadunt, ut ex Frankliniano experimento de phialis ebulliente aqua plenis. (5) Enim vero ea electricitas, quae in vitri ex calore meabilis poros irrepſit, iis poſtea irretita ſimul ac ſemel erumpere non poterit, ac ſuccutiendo inepta erit. Quum igitur calor Symmerianam electricitatem augeat, Franklinianam minuat, inde utriuſque diſcrimen confirmatur.

Immo vero cenſerem vitrum, inferiori armatura conſtanter cum ſolo communicante, ex ſuperioris ſuperficiei

(3) L. c. §. 97 in not.
(4) Vid. Pryestley hiſtoire de l'electricité III p. 234.
(5) Vid. Pryestley l. c. II p. 430, III p. 307.

frictione electricum factum, atque adeo ſola Symmeriana electricitate imbutum, & ſuccutiendo ineptum, (6) impoſita tamen ſuperiori faciei, quae fricata fuit, armatura, poſt aliquod tempus ſuccutiendo aptum fieri ob Symmerianam electricitatem paullatim explicatam, & in armaturis collectam.

Exiſtimo etiam ſecundam, tertiam &c. ſuccuſſionem eo majores futuras, quo vitrum calidius fuit, quum oneraretur, quo majus onus accepit, quo diutius id ſervavit, quum eae omnes conditiones majorem in vitri ſubſtantiam electrici fluidi quantitatem adigant.

Quod vero ab Anglis, ut dicebam, demonſtratum eſt, vitrum ex calore igni electrico meabile fieri etiam antequam eorum experimenta comperta haberem, parum diſſimili experimento cognoveram. Scilicet onerati vitri faciem inferiorem altera manu tangebam, ſuperiorem extremo uno vitri tenuis quinque tranſverſos digitos longi, cujus extremum alterum oppoſita manu apprehendebam: ſi tubus frigefactus eſſet, nec ictum ullum excipiebam, nec deonerabatur vitrum; ſi igne candefactus eſſet, ipſumque uno extremo forcipe prehenſum extremo altero ad armaturam vitri ſuperiorem admoverem, ictum experiebar, quo vitrum ipſum omnino deonerabatur.

Illud ſimiliter ex proprio experimento cognoveram, quod poſtea a Cl. Pryestleyo obſervatum eſſe comperi; ligna quamdiu ex igne admodum calent deferentia eſſe. (7) Nam cilindrum ligneum recens excalefactum fruſtra fricabam, quamdiu calorem ſervabat; nec enim ullam ex eo affrictu electricitatem recipiebat, maximam vero ex fricto acquirebat, poſtquam ſuſceptum calorem amiſiſſet.

(6) Vid. Miſcel. tom. III §. 71.
(7) Pryestley III p. 233.

ARTICULUS SECUNDUS.

De experimentis electricis in poculo metallico inſtitutis.

Experimenta quaedam narrat PRYESTLEYUS in poculo ſtanneo electrico unius menſurae (*une pinte*) capaci a ſe inſtituta ex Franklini monitu, per quae compererit fila, aut globos ex ſubere intra id vas electricum demiſſa ex ipſius electricitate nec commoveri, nec ſe invicem repellere, inde educta electricitatem aliquam, ſed exiguam oſtendere, eo tamen majorem, quo remotius a fundo latera vaſis contigiſſent. (8) Phialam vero, cujus exterior armatura poculi fundo incumberet, uncus manu hominis ſolo inſidentis detineretur, ex congeſta in poculum electricitate non onerari, aut minimum onus recipere. (9) Ex quibus concludit attractionem poculi electrici attractioni ſphaerae cavae ſimilem eſſe, nec corpora electricitatem ex una parte recipere poſſe, niſi in partem aliam ipſam emittere queant. (10)

Ad horum phaenomenorum cauſſam perſequendam, mihi aptiſſima machinula viſa eſt, quae ex metallico filo ad utrumque extremum acuminato, & ad contrarias partes flexo, tum ſupra apicem metallicum librato conficitur, (11) quaeque vi fluidi electrici per acuminatos apices erumpentis eadem ratione in gyrum agitur, qua Segneri molendinum ab erumpente aqua circumvolvitur. (12) Hujus itaque electrici molendini motus ad fundum vaſis metallici

(8) III p. 461, 462.
(9) Ib. p. 462, 463.
(10) Ib. 463, 464.
(11) Vid. PRYESTL. l. c. II p. 435, 436.
(12) Vid. mem. de l'Acad. de Berlin tom. X p. 227 & ſeq.

explorare adgreſſus ſum. Uſus vero ſum vaſe metallico peramplo, caldario ſcilicet aheno aliquot pedes alto, totidemque amplo. Hiſce experimentis humaniter interfuit, immo ipſorum aliqua aut excogitavit, aut perfecit Vir ingenioſus, & in mechanica verſatiſſimus Eques DEBUTET, quae hujuſmodi ſunt.

Experimentum primum.

Machinulam ad fundum aheni conſtitui, ut cum ipſo communicaret; ahenum vero undique inſulatum erat. Electricitatem ope fili metallici a catena ad ahenum, vel ad machinulam duxi. Nulla inde machinulae rotatio, quod videbatur convenire cum ſententia eorum, qui affirmant corpora ad metallici vaſis fundum nullam electricitatem recipere: hinc enim proclive eſt concludere machinulam electricam non fieri, nec propterea in gyrum agi poſſe.

Experimentum ſecundum.

Quum vero dubitarem, machinulam electricam quidem fieri, ſed ideo non moveri, quod fluidum electricum ab ejus acuminatis extremis in latera aheni aeque electrici ferri non poſſet, proindeque quieſcere non quidem electrici fluidi defectu, ſed quod hoc ipſum fluidum intra eamdem omnino ſtagnaret, coronam ex charta inaurata confeci diametro unius pedis, aut ultra, eamque circa molendinum ita conſtitui, ut molendinum ejus centrum occuparet. Corona haec nec cum molendino, nec cum aheno communicabat, ſed per filum metallicum in hominem ſolo inſidentem electricitatem, ſi quam reciperet, diſperdere poterat. Rebus ita conſtitutis, & electricitate ad ahenum impulſa molendinum perniciſſime in gyrum ageba-

tur. (13) Oportuit ergo molendinum a fundo aheni electricitatem recipere, quum ex eadem per acuta extrema in ambientem metallicam coronam emissa in gyrum ageretur. Falsum igitur corpora ad fundum vasis metallici nullam electricitatem recipere, sed potius dicendum, eorum electricitatem ab aequali laterum ipsius vasis electricitate ita reprimi, ut motum nullum habeat, sicque suae praesentiae indicia nulla praebeat.

Quod si educta corpora vix ullam electricitatem ostendunt, id indicio est ea corpora, dum educerentur, acquisitam electricitatem amisisse verosimiliter ex eo, quod lege a Cantono, & AEpino detecta (14), fundus, & latera vasis in ea corpora jam ab ipsis disjuncta contrariam electricitatem inducere nitantur, proindeque receptam ejusdem nominis electricitatem ab iisdem expellere.

Experimentum tertium.

Machinulam ad fundum aheni supra poculum vitreum parum altum insulavi, ut sic parum ab ejus fundo abesset. Ahenum item insulatum erat. Electricitatem ad machinulam deduxi, quin ahenum ullam reciperet. A recepta electricitate in gyrum acta est, paullatim vero ejus celeritas imminuta est, ut tandem omnino quiesceret: tum per admotum digitum ab aheno scintillam eduxi, inde molendinum pristinum motum, pristinamque velocitatem recepit, quae paullatim languens, nova ab aheno educta scintilla, restaurata est, & ita deinceps.

Ex quo apparet, ex electricitate machinulam ad fundum aheni in gyrum agi, dum per acuminata extrema in aheni

(13) Experimentum hoc proposuit Eques Debutet.
(14) Vid. Priest. l. c. II p. 18, & seq.

latera machinula ſe exonerat: prout latera aheni ex congeſta electricitate magis reſiſtunt fluido ab iis extremis advenienti, & ejus fluidi fluxum, & machinulae celeritatem retardari; demum fluido aeque denſo in aheni parietibus exſiſtente ac in ipſa machinula jam nullum ejus fluxum a machinula ad ahenum fieri poſſe, ſicque machinulam quieſcere niſi, educta per admotum digitum aheni electricitate, novae electricitati a machinula excipiendae ipſum ahenum iterum aptum evadat.

Experimentum quartum.

Machinula, ut prius ad fundum aheni inſulata eſt, ut tamen ex ipſa ad manum hominis ſolo inſidentis filum deduceretur. Ahenum item inſulatum eſt. Electricitas autem ad ipſum ahenum deducta. Continuo molendinum in gyrum actum eſt eadem velocitate, eademque directione ac prius, ſive electricitas ad ahenum deducta poſitiva eſſet, ſive negativa.

Ut igitur in priori caſu ex electricitate ab acuminatis extremis machinulae in aheni latera effluente machinula in gyrum agebatur, ita in poſtremo hoc ab electricitate ex aheni lateribus in acuminata machinulae extrema adveniente haec ipſa machinula movebatur. Ex quo confirmatur differentiam inter electricitatem machinulae, & laterum aheni, aut ambientium corporum eam eſſe, quae fluxum electrici fluidi ab ipſa, aut in ipſam efficiat, ſicque eamdem in motum agat.

Confirmatur item, quod alio experimento jam conſtiterat, (15) contrarium motum fluidi modo erumpentis, modo ſubeuntis per extrema machinulae eamdem tamen directionem ipſi machinulae impertiri.

(15) Pryest. l. c. II p 435, 436, III p. 137, 138, 140.

AR-

ARTICULUS TERTIUS

De AEPINI *experimentis, in quo aërea lamina electrico vapore oneratur.*

Elegans AEPINI experimentum de aërea lamina oneranda in hunc modum inſtitui.

Tabulas ligneas binas amplitudinis pedum 8 $\frac{1}{3}$ charta inaurata cooperui, alteram alteri ſuperpoſui ſitu parallelo, ut faciebus inauratis ſibi mutuo obverterentur. Inaurata charta ſuperioris tabulae ab inferiore ejus facie in ſuperiorem producebatur, quo commodius electricitatem a globo advenientem recipere poſſet. Tabulis hiſce interpoſui fruſtula vitrorum diverſae craſſitiei, ita ut inauratae facies modo 11 lineis, modo 19, modo 36 diſtarent. Ad minimam eam 11 lin. diſtantiam onerabantur armaturae, vel ſi mavis lamella aërea ipſis interpoſita, modo tempeſtas valde ſicca eſſet, indeque ſuccuſſio & ictus ſatis validus habebatur. Si tempeſtas minus ſicca, minuſque opportuna experimento eſſet tabulae ad 19 lin. diſtantiam conſtituendae erant, ut onerari poſſent, ictumque praebere, qui minor etiam, quam in praecedente diſtantia percipiebatur. Si demum tabulae ad 36 lin. diſtantiam collocarentur, armatura quidem inferioris tabulae contrariam ſuperiori electricitatem recipiebat, ut, inſulata inferiori ea tabula, facile deprehendebatur, ſed ita exigua utriuſque armaturae electricitas erat, ut ſenſibilem ictum non praeberet.

Quando lamella aërea onerabatur, conſtanter obſervavi, quod ab AEPINO jam fuerat animadverſum, electricitatem armaturae ſuperioris cum globo communicantis vehemen-

tiorem fuiſſe contraria electricitate oppoſitae armaturae communicantis cum ſolo.

Quando vero tabula inferior inſulata erat, ejuſque communicatio cum ſolo per admotam manum perficiebatur poſt inductum onus auferendam, tunc alterno tabularum contactu obſervabam ſcintillas ab ipſis eliciendas celeriter decreſcere. Scilicet attactu ſuperioris armaturae non ſolum exceſſum ipſius electricitatis ſupra electricitatem inferioris armaturae auferebam, ſed multo etiam plus, ita ut ejus electricitas electricitate inferioris armaturae multo minor evaderet. Viciſſim quum inferiorem armaturam tangebam, non ſolum ejus electricitatem electricitati ſuperioris aequabam, ſed multo minorem etiam efficiebam, ut ſic duobus, tribuſve alternis hujuſmodi attactibus totam penitus electricitatem exſtinguerem.

Et haec quidem inaequalitas electricitatum etiam in onerato vitro deprehenditur. Notum enim eſt corpus ex filo ſerico pendulum inter binas armaturas vitri onerati, & inſulati tamdiu oſcillare, donec electricitas penitus exſtincta ſit. Verumtamen ſi inter oppoſitas electricitates abſoluta aequalitas requireretur, nunquam eo modo vitrum exonerari poſſet: nam ubi ad eam aequalitatem perventum eſſet, pendulum quieſceret, nec ex una armatura electricitatem haurire poſſet, niſi eodem tempore par quantitas electricitatis ex oppoſita armatura educeretur.

Quae omnia ab AEpino feliciter explicantur. (16) Enimvero determinata quantitas electricitatis intra datam armaturam ſeorſim ſpectatam colligi poteſt; ſed hujuſmodi electricitas exigua eſt, ſi comparetur cum illa, quam eadem armatura recipit, quando oppoſitae armaturae contraria electricitate attrahitur, ac retinetur, quae tamen attractio

(16) Vid. Pryest. II p. 90.

eo minor eſt, quo oppoſita armatura contrario modo electrica magis remota eſt, craſſiorique coërcente corpore ab eadem ſeparatur. Jam vero quando lamella aërea oneratur, oppoſitae armaturae ad ingentem, ut vidimus, diſtantiam collocari debent, ne oppoſitae electricitates per ipſum aërem ſponte permiſceantur. Hinc modica eſt contrariarum electricitatum in ſe invicem actio, perinde ac in craſſiori vitro contingit; propterea, ut electricitates in armaturas tanta quantitate congeri poſſint, quae mediocri ictui ſufficiat, neceſſe eſt amplitudinem earum augere, unde electricitas, quam ſingulae per ſe recipere poſſunt, major evadit, & ſenſibilem acquirit proportionem ad eam, quae ex electricitatis contrariae in oppoſita armatura reſidentis actione allicitur.

Hinc mirum non eſt priori electricitate (quam per ſe, & ſeorſim ſpectatae ſingulae armaturae recipere, & emittere poſſunt) ex una armatura per attactum ſublata, ſenſibilem inter electricitates oppoſitas differentiam naſci, & ex alterno hujuſmodi contactu cito omnem electricitatem exſtingui. Hinc etiam intelligitur, cur homo, ut advertit AEpinus, qui hujuſmodi aëream laminam inſulatus deonerat, electricus reperiatur eadem electricitate, quam ſuperior armatura poſſidebat, in quam adveniens electricitas congeſta eſt.

Porro quaeſitum eſt, num ſuccutiens electricitas in armaturis relideret, an in coërcente corpore, quod armaturis interjicitur. Argumenta alibi adduxi, ex quibus confici videtur revera in armaturis poſitam eſſe. (17) His alia addidit PRIESTLEYUS, quae eamdem opinionem confirmant. (18) Quum vero maximum argumentum, quo

(17) L. C. Tom. III §. 75 & ſeq.
(18) L. C. III a p. 434 ad 440.

contraria opinio fulcitur, ex FRANKLINIANO experimento desumatur de vitro onerato, cujus armaturae si certa lege auferantur, mutenturque, succussio nihilo minor habetur. Hinc peropportunum fore existimavi ad hanc quaestionem dirimendam, si e conversо iisdem manentibus armaturis, mutataque interjecta iisdem coërcente lamina, succussio haberi posset; quumque id in lamella aërea commodissime fieri posse praeviderem, in eum maxime finem elegans AEPINI experimentum, ut superius exposui, iterandum suscepi.

Itaque aëream laminam, ut prius, inter oppositas armaturas oneravi; dein omnem apparatum ex uno in aliud cubiculum transtuli: qua translatione, & motu omnis aër armaturis interjectus mutari debuit; & tamen nihil inde succutiendi vim debilitatam esse observavi. Unde videtur confirmari succutientes electricitates, in armaturis praesertim, positas esse.

Equidem in animo habebam oleum phiala tenui, lataque includere, cujus oppositae planae, ac latae facies deferentes essent, reliquae partes coërcentes, oleum sic inclusum onerare, postea vas leniter agitare exploraturus, num sic electrica succutiendi vis deleretur. Verumtamen quum oleum fluidum, ac divisibile, perinde ac aër, sit, propterea & ingens crassities, & maxima amplitudo in olei lamella similiter ac in aërea requireretur, ut sensibile onus reciperet: hinc nonnisi vasis peramplis ad hoc ipsum paratis tale experimentum perfici posset (19).

Taurini die 13 *julii* 1773.

(19) PRYESTLEYUS absque successu olei laminam onerare tentavit l. c. III p. 245.

JOHANNIS FRANCISCI CIGNA

DE RESPIRATIONE.

Quum olim cauſſam inveſtigarem cur flamma in intercluſo aëre deficiat, & intereat rei affinitate adductus ſum, ut cauſſam quoque inquirerem, cur animalia ab intercluſo aëre ſimiliter enecentur. Quo factum eſt, ut in varias quaeſtiones incurrerem ad reſpirationem pertinentes, & varia etiam ad eas ſolvendas inirem experimenta, quae omnia eo ordine expoſui, quo ſe mihi primum obtulerunt. Quum eadem recolerem, ac retractarem, exiſtimavi equidem, ſi in meliorem ordinem digererem, & cum aliorum Cl. Virorum experimentis conjungerem, & compararem, magnum inde praeſidium erui poſſe ad multas & difficillimas, de hac re quaeſtiones elucidandas. His itaque mihi incumbendum conſtitui, neque verebar, ne cuipiam fortaſſe viderer in argumento parum anatomico, atque adeo a munere meo alieno verſari, de reſpiratione agens, quum non modo nemo illorum, qui univerſum anatomes ambitum complexi ſunt, principem hanc actionem humani corporis praeterire potuerit, ſed & maximi hujus aetatis anatomici WINSLOVIUS, FERRENIUS, HALLERUS *ipſam*

ex propoſito, & peculiaribus quidem opuſculis perſequuti ſint; quum FANTONUS *cathedrae noſtrae anatomicae ornamentum & decus non ſolum in diſſertationibus anatomicis eleganter, & ingenioſe, ut cetera, id pertractaverit, ſed peculiarem etiam librum pollicitus ſit, in quo multa ex iis problematibus, quae nunc ego adgredior, ſibi ſolvenda propoſuerat.* (*) *Si vir eximius pro ea, qua excellebat, ingenii acie, & ubertate doctrinae, quod promiſerat perfeciſſet, perexiguus ſane meis diſquiſitionibus locus relictus eſſet, quemadmodum ex iis, quae in diſſertationibus anatomicis interſperſit, quae quidem mihi ſaepe erunt laudanda, conjectare licet. Hi vero qualeſcumque conatus niſi praeſtabunt, ut lucubrationes tanti viri minus deſideremus, at ſaltem meam in perutili ſtudio diligentiam ſignificabunt. Meliora fortaſſe, certioraque fuiſſem allaturus, ſi varia, quae in hanc rem mihi tentanda propoſueram, experimenta exſequi potuiſſem, ſed aliis aliiſque curis diſtractus uſque adeo diſtuli, dum Regia Societas quintum hoc volumen prope editura eſſet. Quare occaſionem captare conſtitui meditationes has, quoad fieri potuit emendatas, evulgandi, accuratiora impoſterum, & ex propriis experimentis, & ex doctorum virorum animadverſionibus allaturus.*

(*) Anatomia corporis humani p. 351.

CAP. I.

De Problemate HARVEJANO, *& de cauſſa inchoandae reſpirationis.*

I Olim problema doctis viris HARVEUS propoſuit, qui „ fiat, ut foetus in lucem editus, & membranis inte„ gris opertus, & etiamnum in aqua ſua manens aliquot „ horas citra ſuffocationis periculum ſuperſtes ſit, idem ta„ men ſecundinis exutus, ſi ſemel aërem intra pulmonem „ attraxerit, poſtea ne momentum quidem temporis abſque „ ea durare poſſit, ſed confeſtim moriatur; ſimiliter, quum „ in ſectione caeſarea foetus horis compluſculis poſt matris „ obitum eximitur, vitalis tamen reperitur, ſimulac vero „ eo ſemel gaviſus fuerit, etiam in eaſdem ſecundinas re„ poſitus, illico ob hujus carentiam ſuffocetur. (*a*)

II Ex eo tempore plerique anatomici ejus problematis ſolutionem adgreſſi ſunt. Et quidem alii infantes a matre divulſos reſpiratione carere non poſſe docuerunt, quod ejus ſanguinem aëre imbutum non amplius accipiant, ſicque reſpiratione egeant, qua ſanguini neceſſariam aëris quantitatem haurire poſſint. (*b*) Cenſuerunt alii inductam ſpirandi neceſſitatem mutationi in pulmonibus factae tribuendam eſſe, qui prius denſi, aqua graviores, ex reſpiratione ſe-

(*a*) *Certum eſt per noſtra, & per magnorum dudum virorum experimenta foetus nuper ex utero matris exciſos, inque amnio relictos mediis in aquis vivere, neque perire, niſi eo tempore, quo alioquin credibile fuerit tenerum animal aliunde periturum, poſt aliquot nempe horas, aut altero demum die* Cl. HALLER el. phyſ. III p. 314. *Veritas facti ab Harveo propoſiti confirmatur ſectionibus caeſareis, & memorabili exemplo Vanderwiel de milite, qui uterum cum foetu e gravida exciſum ad tribunum detulit, ubi ſolutis membranis vivus puer lucem vidit.* BERGERUS de nat. hum. lib. II cap. 3 p. 499.

(*b*) BORELLUS de mot. anim. prop. CXVIIJ.

mel inchoata variores levioresque evadant; ea nempe ex mutatione fieri, ut jam sanguinem copiosius admittant, qui per ipsos trajici absque respiratione non possit. Propterea ex ejus sanguinis congestione animalia suffocari, quum primum spirandi facultas iisdem adimitur. (*c*) Sunt qui obliquitatem ovalis foraminis ductusque arteriosi in suffocationis causſam adduxerunt, (*d*) aut a respiratione dilatata pulmonalium arteriarum orificia. (*e*) Sunt qui eam suffocationem tribuerunt occlusioni ovalis foraminis, ductusque arteriosi, propter quam, praetermisso pulmone, sanguis circulum obire amplius non possit. (*f*) Sunt demum qui velint foetum in utero ab aëris pressione non affici, nec eidem sustinendae vires ejus sufficere, nisi respirando elasticum aërem hauriat, qui exteriori aëri contranitatur: hinc, nisi respiret, ab externa pressione suffocari. (*g*)

III Ad primum quod spectat non video, cur foetus a matre sejunctus, & intra amnion relictus respiratione carere possit; posteaquam aperto amnio semel respiravit, amplius non possit. Neque enim credibile est membranas a matre separatas sanguinem aëre imbutum foetui suppeditare: similiter foetus caesarei, qui vivi educuntur, humores novo aëre imbutos a matre jam mortua, atque adeo non respirante excipere non potuerunt. Addit Bernoullius, si ex hac causſa morerentur, quibus spirandi facultas adimitur, tardius saltem esse interituros. (*h*) Demum Pitcarnius observat, catulum, obstructo ore, & sublata re-

(*c*) Truston de respir. usu diatriba a p. 104 ad 107.
(*d*) Idem l. c. p. 107, 108.
(*e*) Vide apud Hallerum l. c. p. 315, 316.
(*f*) Dionis Anatom. de l'hom. p. 445: Qui homines quosdam strangulationis vim elusisse putat, quod vias foetus adhuc apertas sanguis repetere potuerit. Eadem est opinio Bernoulli in disputatione, quae exstat in collect. Halleriana p. 638.
(*g*) Bergerus l. c. p. 499.
(*h*) L. c. p. 625, 626.

spira-

ſpiratione, haud minus perire, licet per tranſuſionem ſanguinem interim commutet cum alterius animalis libere ſpirantis ſanguine, ſicque ſanguinem accipiat aëre divitem (*i*).

IV. Ad alterum reſpondet Celeber. HALLERUS haud ita ſubito, nec ex paucis reſpirationibus recens nati pulmonem mutari; quin imo etiam poſt pluſculas reſpirationes avium pulmonem ne quidem natare. (*k*) Quoniam vero mora in variori aëre paullatim pulmones iterum denſiores evadunt (*l*), haud impoſſibile eſſet, aëre paullatim ad majorem raritatem perducto, ac interim per partes renovato (*m*), priſtinam pulmoni denſitatem reſtituere, atque adeo animalia a ſpirandi neceſſitate liberare, ſi ab ea ſola cauſſa haec neceſſitas penderet.

Obliquitas ductus arterioſi, & ovalis foraminis, obſervante DAOUSTENE (*n*), a reſpiratione non mutatur, augeturve, nec propterea in cauſſam afferri poteſt, cur ſemel coepta reſpiratio ejuſdem perennandae neceſſitatem inducat.

V. Dilatatio arteriarum pulmonalium augebit quidem ſpirandi neceſſitatem, ſeu eamdem urgentiorem efficiet; ſed quum ea mutatio a paucis reſpirationibus exſpectanda non ſit, idcirco primae illius neceſſitatis, quae poſt paucas reſpirationes naſcitur, cauſſa eſſe nequit.

Nec etiam phoenomeni explicatio peti poteſt a clauſo foramine ovali, ductuque arterioſo, quae nonniſi progreſſu temporis, diuturniorique reſpiratione demum clauduntur (*o*).

(*i*) De cauſſis diverſ. molis §. 19. Id etiam experimentum a DUVERNEYO refertur. Oeuvres anatom. II p. 82.
(*k*) L. c. p. 314.
(*l*) GUIDEUS tranſ. philoſ. n. 122 MUSSCHEMB. in Florent. p. 51, 52 not. 2.
(*m*) Vid. Miſc. Taur. II p. 180.
(*n*) In diſput., quae exſtat in collect. HALLER. p. 689.
(*o*) BERGERUS de natur. hum. p. 498. *Quando nunc reſpiravit animal, non quidem continuo aut ductus arterioſus clauditur, aut foramen ovale* HALLER. l. c p. 315. Confer. eumdem op. min. I. p. 440.

Postremo ex pressione aëris, ac necessitate elastici fluidi in sanguine respirandi necessitas deducenda non est, quum & in utero, ac membranis comprehensus foetus, mediatam quidem, sed minime dubiam aëris pressionem patiatur, & foetus humores jam elastico aëre referti sint, ut alibi constabit (*p*).

VI At vero longe probabilior Harvejani problematis solutio se offert ex obstetricantium constanti observatione petita, qui tradunt, in partu foetum interfici, quoties funiculus umbilicalis ante caput ita propendet, ut inter ipsum, & uteri ostium comprimatur prius, quam infans, exerto capite, & auram captare, & respirare potuerit (*q*), ea nimirum ex observatione colligitur ex intercepto placentam inter & foetum vel in ipso utero commercio, infantem interfici, si interim respirare non possit. Hinc Bohnius existimat foetus, quos vulgo mulierculae ex funiculo circa collum circumvoluto inter pariendum strangulari sibi persuadent, non quidem ex strangulatione suffocari, sed potius ex nimia circumducti funiculi tensione, aut pressione, ex qua cum placenta commercium intercipiatur: siquidem respiratione hactenus impune caruerint, & etiam nunc carere possint, commercio cum placenta, quamdiu respirandi facultas non datur, sine vitae dispendio non possint (*r*).

VII Equidem nonnulli opinati sunt, sublato cum placenta commercio, respirationem tantopere necessariam evadere ex eo, quod foetus, qui sanguinem matris aëre refer-

(*p*) Vid. infra cap. III.

(*q*) Roederer art. obst. p. 99, 198, 296, 306, 307. Funiculus etiam a pectore aut pelvi contra uteri ostium compressus, intercepto sanguinis circulo, foetum interficit (ib. p. 112). Eadem observatio a Meryo proposita fuerat (Mem. de l'Acad. T. X), & a Mauriceaux (Malad. des fem. cap. xxxvi) Monro (essais d'edimb. II p. 196) Hebensreit (pathol. funic. umbil. §. 10.)

(*r*) Infantic. p. 358.

tum excipere nequit, nisi respirando aërem hauriat, quo ipsius humores imbui possint, ex penuria aëris in eisdem humoribus moriatur (*s*). At eam alii opinionem gravissimis difficultatibus premi superius observavimus. Quare longe verosimilior hujus phoenomeni explicatio videtur, quam tradidit DAOUSTENC ex mechanica necessitate deductum, scilicet ligatis arteriis umbilicalibus majorem resistentiam opponi sanguini in inferiorem aortam influenti, qui prius libere in placentam effundebatur: hinc sanguinem in aorta inferiori congestum resistere sanguini per ductum arteriosum advenienti, qui propterea majori nisu in pulmonales ramos irruat. Similiter ligatam venam umbilicalem efficere, ut copia, & impetus sanguinis in dextram auriculam advenientis minor sit, qui propterea facilius coërceri possit ab aucta jam copia sanguinis per pulmonales venas in sinistram auriculam influentis; ex utraque vero caussa impetum & copiam sanguinis ad pulmonem tantopere augeri, ut absque respiratione transmitti non possit: hinc ex sanguine in pulmonibus cohibito, ac congesto infantem suffocari, nisi per respirationem explicato pulmone ipsius trajectus adjuvetur liberiorque reddatur (*t*).

VIII Sic etiam ob ligatas arterias umbilicales oppletioni pulmonum, & capitis, recens natos infantes obnoxios esse olim COWPERUS adnotavit (*u*), & ex eadem porro caussa *sanguis inferioris aortae arterias pelvis pedumque di-*

(*s*) MERY l. c. MAURICEAUX l. c.

(*t*) In disp. quae habetur in collect. HALLER p. 688. *Interituros, qui ante pulmonum expansionem etiam nativitati proximi oppressa vel strangulata vasa umbilicalia habent, quum ex altera parte, qua venam, intercepto ejus flumine, ventriculi cordis anterioris vacuitas, ex altera autem parte, qua arterias, oppressis earum canalibus, plenitudo ventriculi cordis posterioris, ac depletio ejus impedita, hinc subitanea mors necessario consequatur.* HEBENSTREIT l. c. § 9.

(*u*) In append. ad anatom. hum. corp. n. 59.

latat (*x*), *unde inferiores artus insigniter augentur* (*y*). Ex venae autem umbilicalis ligatura icterum recens natorum proficiſci ſuſpicatur Cl. MORGAGNUS (*z*). An vero ex eadem etiam cauſſa lac in mammis recens natorum, ex auctо ſcilicet ſanguinis impetu in mammarias arterias?

IX Quemadmodum vero ligato funiculo augetur impetus ſanguinis ad pulmones, ſic viciſſim per reſpirationem liberiori parata via ſanguini in pulmonem advenienti, ejus impetus a funiculo avertitur. Hinc eſt, ut funiculi ligaturam licet turiorem, minimeque omittendam, haud tamen neceſſariam eſſe Cl. viri contenderent (*a*), quod nempe ſanguis multo minori impetu ad ipſum pellatur, poſtquam per reſpirationem explicato pulmone, in hunc copioſius liberiuſque detorquetur.

X Ex quibus jam ſolvitur problema HARVEJANUM, cur nempe infans, ubi ſemel reſpirando aërem hauſerit, eodem deinceps carere non poſſit, (l) ſcilicet per reſpirationem ſanguis a funiculo avertitur (IX); defectu vero ſanguinis, & aëris contactu tum funiculus, tum placenta refrigerantur: & immeabilia fiunt (*b*). Hinc nec ſanguis

(*x*) HALLER pr. lin. §. 913, 948.
(*y*) Ib. §. 952.
(*z*) De cauſ., & ſedib. ep. xlviij §. 60.
(*a*) Primus hanc obſervationem propoſuit Cl. FANTONUS, (anat. corp. hum. p. 261), quae multo magis in brutis obtinet, quam in homine. Confer Cel. HALLERUM cl. phyſ. viij p. 1 p. 441, & ſeq.
(*b*) Pulcherrimae ſunt, & ad rem noſtram apprime faciunt ROEDERERI obſervationes, quibus conſtat, extracto foetu, nec compreſſo funiculo, calorem primum, dein pulſum in hoc exſtingui, in locis primum ab umbilico magis diſſitis, inde pedetentim in propioribus; idque intra pauca minuta contingere, ſi placenta educta, & frigido aëri expoſita ſit, paullo tardius, ſi foetus, funiculus, & placenta intra tepidum demergantur, vel ſi placenta ad uterum adhuc adhaereat. Ex quibus concludit *proculdubio pulſus in fune, quum natus eſt infans, ceſſat propter novam partim circulationis in infante a reſpiratione rationem, partim propter externi aëris, a quo funis afficitur, contactum.* Vid. Auct. icon. uter. hum. tab. vj p. 27, 28. *Canalibus umbilicalibus refrigeratis, ſanguis, quem continent, omnem mox vitalitatem deponit congelaſcit* BOHNIUS l.

funiculi viam, quam ob inchoatam respirationem deseruit, repetere poterit, nec propterea infans respiratione deinceps carere (VII).

XI Hinc est, ut per respirationem recens natus novam alacritatem acquirat (*c*): sic enim sanguini aegrius, ac tardius per resistentem funiculi, ac placentae viam circumeunti nova ac liberior paratur, unde expeditior per universum corpus ipsius circuitus evadit. Hinc etiam ratio eruitur, cur debilis infans, quamdiu non respiravit citius reficiatur, si funiculus non fuerit deligatus, & cur cauti obstetricantes non prius vinciant, quum coeperit respirare (*d*), ne videlicet per ligaturam nova sanguini debiliter moto resistentia opponatur, ex qua debilis circuli vires ita opprimantur, ut metuendum sit, ne penitus fatiscant (VII).

XII Quum, intercepto per funiculum circuitu, foetus necessario pereat, nisi respiret (VI); hinc perperam nonnulli ex nodis in funiculis foetuum quorumdam repertis eos nonnisi per os nutriri potuisse concludunt (*e*). Etsi enim per os nutriri aliis argumentis satis fuerit evictum (*f*); ex ea tamen observatione sententia haec nequit confirmari: nam si nodi ejusmodi fuissent, ut sanguinis trajectum per funiculum impedirent, non solum nutrimentum sustuliissent, sed & suppresso sanguinis circuitu (VII) foetum enecassent (*g*).

(*c*) Solus inter catulos caesareos robur demonstravit, qui respiraverat (HALLER el. phys. III p. 318) nova alacritas animalis post captum aërem (ib. viij p. II p. 162) si ovum serpentis frangatur, quum exclusioni proximus est, serpens apparet in spiram contortus, & immotus, sed postquum bis terve ore hiaverit, aëremque hauserit, vividos motus habet. Aër repente machinam in motum ciet. DUVERNEY l. c. p. 573.

(*d*) ROEDERER el. art. obst. p. 167, HEBENSTREIT l. c. §. 10.

(*e*) Petit Mém. de l'Acad. an. 1718 HEISTER comp. anat. p. 316.

(*f*) Vid. HALLERUM phys. el. viij p. I p. 201 & seq.

(*g*) Haec observatio MONROI est. Essais d'EDIMBOURG II p. 196.

XIII Ex propoſito igitur phoenomeno (VI, VII) conſtat, *magnam partem ſanguinis in foetu rectius ad umbilicales arterias duci, & a pulmone onus averti* (*h*), ac propterea placentam tamquam diverticulum ſanguinis conſiderari poſſe, dum pulmo ex aëris defectu nequeat dilatari (*i*). Etſi enim in oviparis deſit, hinc diverſa in ipſis oeconomia admittenda videatur (*k*). Attenta tamen obſervatio demonſtrat aliquid analogum ipſis reperiri, quod eidem officio inſerviat. Revera NEHEDAMIUS refert *in ovo etiam tunicas inſigniter craſſeſcere, & ſpeciatim in ovo anſerino albuminis tenuioris tunicam, ſub finem incubationis exiguas quaſdam carneas papulas ſibi interſperſas ubique oſtendere iis fere ſimiles, quae in equa occurrunt* (*l*). Eae igitur tunicae, & vaſa per eas diſtributa in ipſis etiam oviparis detorquere ſanguinem a pulmone poterunt, & vicariam placentae viviparorum operam praeſtare, quod confirmatur elegantiſſimis perſpicaciſſimi HALLERI obſervationibus, qui nempe vidit in pullo incubato tum demum pulmonem, & dextrum ventriculum evolvi, quum membrana umbilicalis, & rami arterioſi per ipſam diſtributi, immutabili ovi longitudine terminati, minus extenſiles evaſerunt, & magis reſiſtunt ſanguini per inferiorem aortam advenienti: ex hac enim reſiſtentia fieri cenſet Vir ſapientiſſimus, ut dextra auricula juxta derivationis leges in dextrum ventriculum facilius ſe exoneret, quam in ſiniſtram auriculam; propterea & ipſum auriculam dextram & ventriculum dextrum, & pulmonalem arteriam evolvi ac dilatari, majoremque ſanguinis quantitatem ad pulmonem pelli (*m*).

(*h*) HALLER pr. lin. §. 924.
(*i*) NEEDHAM. de formi foetu in Bribl. MANGET I p. 558.
(*k*) Id. ib.
(*l*) Idem p. 545.
(*m*) *Formation du cœur* II p. 100, 101, 102.

XIV An non igitur quantitas ſanguinis ad pulmonem appellentis ſenſim aucta, tandem tanta erit, ut non neque libere abſque reſpiratione tranſmitti amplius poſſit? An non quum primum ex hac cauſſa gravari incipiet pulmo, anxietatem aliquam pullus experietur, primoſque reſpirandi ſtimulos percipiet? An non adeo tum demum incipiet reſpirare, quum ab umbilicali membrana repulſus ſanguis, majorique copia ad pulmonem delatus, quam ut commode tranſmitti poſſit anxietatis ſenſum excitare in eodem incipiet?

XV Haec aut his ſimilia in homine etiam & vivaparis locum habere obſervatio ſuadet: nam in his etiam, progrediente geſtatione, placentae ad foetum proportio minuitur (*n*), & magna pars foraminis ovalis obturatur, ut ſolus, tranſverſim ovalis, obliquus aditus liber ſit, qui in maturo foetu $\frac{1}{15}$ venae cavae vix ſuperet (*o*), ex quibus cauſſis ventriculus cordis dexter juxta derivationis leges explicatur (*p*), ſicque quantitas ſanguinis, & impetus in pulmones gradatim augetur. Quapropter non inveroſimile eſt, tum demum foetum ad reſpirandum ſollicitari, quum tanta quantitas ſanguinis ad pulmonem affluit, ut aegrius tardiuſque per ipſum tranſmittatur.

XVI Hinc aliquod robur ad illorum opinionem videtur accedere, qui foetum reſpirandi deſiderio ad exitum excitari docuerunt (*q*). Quoniam enim in utero reſpirare

(*n*) Astruc. *Art. d'accoucher* p. 210.

(*o*) Haller pr. lin. §. 922, aut ad ſummum $\frac{1}{10}$ el. phyſ. vñj p. II p. 14.

(*p*) Id. pr. lin. §. 922.

(*q*) Fabricius ab Aquapendente. Vid. Harveum de partu p. 338. Pechlinus cap. xij, Bohnius circ. anat. progym. III Bergerus l. c. lib. II cap. III p. 492, Diemerbroek. anat. lib. 1 cap. XXXV p. 314 Lieutaud el. phyſ. p. 196.

nequit, quum primum majori copia ſanguinis per compreſſos pulmones difficilius tranſmittendi gravari incipiet, anxius, inquietuſque evadet, primoſque in paritura pariendi ſtimulos excitabit, quae cauſſa partus a natura petita (XV) videtur confirmari obſervatione infantum, qui mortua jam matre ſponte prodierunt (*r*): neque iis difficultatibus obnoxia eſt, quibus ceterae, quae ſolent proponi (*s*), quamquam non diffitear, cauſſas etiam alias tum in ipſo foetu, tum praeſertim in matre (*t*) ad hanc actionem excitandam concurrere.

XVII Ex quibus jam conſtat, quae nam ſit primae reſpirationis cauſſa. Nempe maturus foetus, qui vel in ipſo utero jam moleſtia aliqua ex copioſius ruente in pulmones ſanguine affici incoeperit (XV), quum primum prodierit, & reſpirandi facultatem adeptus fuerit, ob idipſum reſpirabit, ut liberiori facto ſanguinis per pulmones circuitu, quum moleſtiam avertat, qui porro ſtimulus in neceſſitatem convertetur, quum ex ipſa reſpiratione, aut frigore, aut vinculo, ſublato cum placenta commercio (X), tanta quantitas ſanguinis ad pulmonem urgebitur, ut niſi reſpi-

(*r*) Harveus l. c. p. 345 Haller el. phyſ. viij P. I p. 420.

(*s*) Uti moles ponduſve foetus, alimenti defectus. Vide Harveum l. c. p. 346 *Hiſt. naturel* Tom. IV p. 129, & ſeq. Diemerbroekius, qui infantem prodire contendit ex eo quod, ejus calore ſenſim aucto, tandem reſpirationis refrigeria opus habeat, haec addit „ *illum autem „ caloris incrementum aeque contingit in parvo foetu, qui ſatis diu in „ utero haeſit, quam in magno, atque hinc cujuslibet maturi foetus ſive „ magni, ſive parvi eadem eſt cauſſa majoris calcitrationis, & partus.* l. c. p. 314.

Neque vero opponi poteſt foetum aërem deſiderare non poſſe, cujus nullam habeat notionem (de Buffon. l. c. 124.) nam ſufficit eumdem, gravato pulmone, inquierum eſſe, ut matrem motibus ſuis ad patrem ſtimulet, idemque caecus appetitus, natum infantem ad reſpirandum incitabit, qui ad ſurgendum papillam invitat, aliaſque magis compoſitas actiones edendas, quarum nec effectum novit, nec inſtrumenta.

(*t*) Ut menſtruae evacuationis molimina De Buffon l. c.

respirare pergat, eumdem suffocari necesse sit (VII): jure igitur affirmarunt Viri Cl. ob eamdem causam perennare respirationem, ob quam semel inchoavit (*u*); jure etiam statuerunt causam hanc talem esse oportere, ut non fortuito, sed constanter, ac necessario animalia ad eam actionem edendam impelleret (*x*).

XVIII An igitur ob dolores, quos in partu, & post ipsum ex novi elementi injuriis infans patitur ad quiritandum, atque adeo ad respirandum impellitur (*y*)? At pullus intra ovum pipit nulla exteriori molestia affectus, & animalia etiam muta aërem captant (*z*), & hujusmodi causa tumultuariae musculorum contractioni potius, quam ordinato respirationis motui excitando apta esset; unde Cl. FANTONUS existimare se ajebat ob voluptatem potius, quam ob dolorem animal recens natum ad respirandum impelli (*a*). An ob liberatos a pressione nervos diaphragmaticos animal primum respirat (*b*)? At in avibus, quibus nullum diaphragma, respiratio haud minus certum exordium habet (*c*). An ob nisum ad emittendas feces respiratio incipit (*d*)? At eae feces in avibus nullius fere momenti sunt (*e*), easque vel intra uterum deponere potest foetus, & reapse deponit (*f*), ut propterea meconii excretio pro effectu po-

(*u*) FANTON. l. c. p. 351 MARTIN essais d'Edimb. 1 p. 202.
(*x*) *Soli etiam casui quadrupedum, aviumque vitam committere nolim, ut motui alicui temere ex sensu incommodi facto . . . . Oportet autem ejusmodi causam invenire, quae neque late pateat ac ferarum spiritalia saecla.* HALLER el. phys. III p. 317.
(*y*) BORELLUS prop. CXVII. TRUSTON l. c. p. 115, 116.
(*z*) HALLER l. c p. 316
(*a*) L. c. p. 350, 351.
(*b*) MARTIN l. c. p. 202: alii, quos recensct Cl. HALLERUS l. c. p. 317 n. 6.
(*c*) Uti adnotat HALLERUS loc. ult. cit.
(*d*) TRUSTON l. c. p. 117.
(*e*) HALLER l. c p. 316.
(*f*) *Mihi quidem non raro contigit feces in liquore amnii contentas, in ventriculumque resorptas invenire.* NEEDHAM l. c. p. 553. Similia observavit Cl. HALLERUS l. c. p. 318.

tius quam pro cauſſa reſpirationis habenda ſit. An aër pondere ſuo in nuper nati pulmonem deſcendens ipſum ad reſpirandum ſollicitat (*g*)? An potius irritatis naribus, excitataque ſternutatione eumdem reſpirare cogit (*h*)? At nuper natum animal *non reſpirat, ſi langueat*, etiamſi *is languor ponderis neceſſarium effectum morari non poſſit* (*i*), ſaepiſſimeque non ſternutat (*k*), aut certe a ſternutatione reſpiratio exordium non ducit.

An demum motus, quo animal cibum quaerit, is eſt, quo veluti inſcius primum aërem hauriat? At motus quo cibum quaerimus, aut deglutimus, a motu reſpirationis valde differt (*l*), deinde pullus ſtatim ac excluſus eſt cibum non quaerit (*m*), nec infans praeſertim abortivus (*n*), quum tamen a nativitate ſtatim ſoleat reſpirare (*o*). Poſtremo pullus longo ante excluſionem tempore roſtrum aperit, & claudit, quaſi cibum quaerens, quum nonniſi poſtremis diebus & reſpiret, & pipiat (*p*).

XIX Cauſſa igitur reſpirationis eſt mutatio ſenſim nata in placenta, & corde foetus progreſſu geſtationis, multoque magis ſublatum cum placenta commercium, ex quo tanta quantitas ſanguinis in pulmonem urgetur, ut abſque

(*g*) Bernoullius l. c. p. 625 626. Pitcarnius l. c. §. 15.
(*h*) *L'Anatom. d'*Heister II p. 115.
(*i*) Haller l. c. p. 317
(*k*) *OEconom. animal par* M. Sigaud II p. 40.
(*l*) *Deglutiri abſque reſpiratione adeo male negatur, ut cum reſpiratione deglutiri nequeat.* Haller el. phyſ. VIII p. I p. 201, 202.
(*m*) Aliquamdiu nutritur vitelli colliquamento. Haller form. du coeur p. 158. *Pulli ovi corticem ea parte percutiunt, qua reſpiratione opus habent, hoc agentes potius a reſpiratione, quam a cibi indigentia coacti, quum, ſtatim ac e cortice excluſi ſunt, reſpirent; ſine cibo autem biduo, diutiuſque conſiſtant.* Fabricius ab Aquapen. l. c.
(*n*) *Maſſae vegetabili ſimilis continuo ſomno indulget, vagitum non edit, cibum non appetit.* Roederer. el. art. obſt. §. 205.
(*o*) Statim reſpirat vel ante ſeptimum menſem natus. Pitcarnius l. c. §. 19.
(*p*) Jam hora 190 aperto roſtro cibum quaerit (Haller for. du coeur II p. 50) quum nonniſi hora 451 primum pipiat (ib. p. 53.)

reſpiratione per ipſum nequeat tranſmitti. (XVII) Propterea canalis arterioſus, aut foramen ovale, utcumque apertum (*q*) neque ſanguinem a pulmone avertere poterit, neque animal a ſpirandi neceſſitate immunem reddere. Et quidem eae viae ſuperſtites necem a ſtrangulatione non praecavent (*r*), *& foramen ovale etiam ſi ampliſſimum numquam tamen plenum otium pulmonis faceret, quum venae cavae ſanguinem* $\frac{1}{10}$ *fere minuat* (*s*), & eaedem viae in amphibiis quibuſdam ſic dictis, & in aquaticis quibuſdam avibus, etſi perpetuo apertae maneant, ſuffocationem tamen ab intercepta earumdem reſpiratione non impediunt (*t*).

XX. Qui autem putarunt ab earum viarum obſtructione ſolummodo ſpirandi neceſſitatem afferri, quum viderent in nuper natis eas vias haud ita ſubito claudi, propterea dubitarunt de veritate phaenomeni ab HARVEO propoſiti (1), nec ita ſubito fieri crediderunt, ut infans facultatem amitteret, per quam hactenus aëre carere impune potuerat (*u*); quum tamen, ut diximus, commercium cum placenta ob inchoatam ſemel reſpirationem interceptum illi facultati au-

(*q*) Quale illud a Cl. MORGAGNI obſervatum in infante quindecim dierum, in quo valvulam dicit penitus defuiſſe (l. c. ep. XLVIII §. 63) & ſimile LIEUTAUDII (*eſſai anat.* p. 326) & demum illud Albini in anu decrepita, quod cum corde increverat, & per aetatem augeri perexerat (anat. Acad. lib. I c. IX p. 34.

(*r*) *In noſtris, & aliorum experimentis apertum in homine, inque animali id foramen mortem ab aquis minime moratum eſt, neque necem a ſtrangulatione, aut a ſuffocatione ſequentem avertit* HALLER. el. phyſ. III p. 252; ſimilia iterum ib. VIII p. II p. 159. Inutilis *foret levis ille hiatus tanto ſanguini tranſmittendo.* BARTHOLIN. anat. p. 410.

(*s*) HALLER l. ul. cit. p. 14.

(*t*) Id. ib. III p. 270, & in BOERH. not. 14 ad §. 691.

(*u*) BOERHAAVE in prael. ad §. 691 inſtit. ad verbum *mutatur.* Contra DIEMERBROEKIUS ne in amnio quidem contentum equinum pullum, vel ad horae ſemiquadrantem extra uterum vivere affirmat, & erroris HARVEUM redarguit (l. c. lib. I cap. XXXV p. 315). Veroſimiliter talis eventus frigori tribuendus, cui ſecundinae extra uterum fuerunt expoſitae.

ferendae par sit (X). Alii putarunt per eas vias utcumque apertas sanguinem moveri amplius non posse; cur autem moveri non posset, caussam quaesiverunt in earum viarum obliquitate (*x*), Alii demum eas vias sufficere censuerunt suffocationi praecavendae (*y*); imo impedito earum coalitu per frequentem recens natorum in tepidam submersionem vera amphibia effici posse sperarunt (*z*); quod tamen & me olim frustra in recens natis felibus tentasse memini, & fieri non posse propolita ratio (VI VII) pleniſſime evincit.

XXI Equidem eae viae foetui peculiares, si apertae maneant, quum oneris partem a pulmone avertant, etsi plenum ipsius ostium facere nequeunt (XIX); efficient tamen, ut animalia paullo diutius respiratione carere possint, quam cetera, in quibus eae viae jam fuerint coalitae (*a*); ex quo apparet, cur recens nata animalia, si in-

(*x*) *Quaeritur quae sit caussa, cur intercepto infantis in lucem editi spiritu, illius sanguis, etsi per pulmones moveri nequeat, per antiquas tamen illas vias transire non conetur: hoc enim si fieret, videtur per aliquod saltem longius temporis spatium non moriturum.* Thruston l. c. p. 102. Vide supra 2, 3.

(*y*) Auctores supra citati §. 2, not. *f* tum Muschembroekius, qui feles recens natos in vacuo inflari, prosterni, vomere, sed non mori contendit (In Florent. p. 56, col. Acad.) & alibi. *Feles*, inquit, *etiam octo diebus post nativitatem non moriuntur in vacuo, nec alia quibus foramen in corde ovale, tum canalis in pulmonibus arteriosus patet.* Introd. ad Philos. nat. §. 2166.

(*z*) *An consuetudine fieri possit, ut sanguis antiquas semitas repetat, mihi nondum compertum est, quamvis illud fieri*, sed rarissime posse urinatores, & animalia quaedam alia non contemnendo prorsus argumentn sint. Thruston l. c. p. 110. Fieri posse, & inde amphibia parari. Boerhaawe loco ultimo citato, & Cl. De Buffon, qui experimentum instituit hist. natur. IV, p. 176.

(*a*) Nuper nata animalia difficilius strangulari, Bohnius infant. p. 355. Quum ligata fuisset aspera arteria, post 10 minuta aëre opus habebant (ex Birchi Hallerus el. phys. III, p. 316, not. *i*) aut post 24 demum horas (ex Senac. ib. p. 314, n. *i*) quod incredibile videtur, nisi syncope, aut alia fortuita caussa accesserit. Feles recens natae 7 minutis in vacuo pereunt. Boyle ex p. pneum. tit. IV, & de relat. inter aërem, & flam. vital. animal. exp. VI.

firmiſſima fuerint, ad horas aliquot reſpirationem non moliantur (*b*); quum enim neceſſitas reſpirationis ex vi, & impetu circumeuntis ſanguinis dependeat, atque ob idipſum ſubmerſi, ſyncoptici, convulſi homines ad tempus interdum ſatis longum reſpiratione carere poſſint, quin enecentur (*c*), eo potiori ratione hoc privilegio eos gaudere neceſſe eſt, quibus ob nondum obſtructas memoratas vias minus urgens neceſſitas reſpirationis incumbit. (*d*)

(*b*) *Quando infans languet aliquo neque minimo tempore abſque reſpiratione perdurat.* HALLER el. phyſ. III, pag. 225, 317.

(*c*) Confer HALLERUM l. c. p. 266. DIEMERBROEK l. c. lib. II cap. XIII.

(*d*) Huc ſpectare videntur hiſtoriae a BOHNIO propoſitae de recens natis puellis, quae quum ſub terram ſepultae fuiſſent, viventes inde protractae fuerunt, etſi earum altera per ſeptem horas delituiſſet (l. c. p. 355, 356) advertit ſiquidem ipſe BOHNIUS *infirmum aliquando excludi partum, ut omni ſenſu, motu, ac reſpiratione per aliquot momenta, ſeu notabile tempus deſtitui videatur, inde quaſi ſyncopizantem vitam in apricum poni.* (Ib. p. 352). Et paullo poſt. *Simile quid his fieri concipiendum, quod in hiſtericae, & hypochondriacae ſuffocationis nonnullis ſpeciebus, & animi deliquio contingere obſervamus in his nimirum affectibus inſpirationem aëris evidenter interpolari per notabile tempus ſine vitae cum morte commutatione* (p. 354, 355.) Huc ſpectare quoque videtur ſimilis hiſtoria a BOERHAAVIO relata (prael. l. c.), niſi quod in hac relictus funiculus cum ſecundinis, & cum infante ſepultus ad eius vitam ſervandam conſpirare potuerit.

HALLERUS catellum recens natum, qui tamen reſpiraverat per dimidiam horam in tepida vixiſſe vidit, (ſur la reſp. exp. 123) & animalia recens nata diutius vim vacui ferre advertit, (el. phyſ. III, pag. 314); eademque eſt obſervatio DUVERNEY (l. c. II, p. 89) experimenta etiam BUFFON. (vid. ſupra n. X) ad diuturniorem tantum reſpirationis ſuſpenſionem pertinent, nec aliter videntur interpretanda experimenta MUSCHEMBROEKII ſuperius not. V. memorata.

CAP. II

In quo nam posita sit necessitas, in quo utilitas respirationis.

XXII Aërem respiratum non aliam ob causſam respirationi ineptum evadere ostendi, nisi ob noxios admixtos vapores, qui & animalibus infensi sint, & flammam suffocent, & odore foetido se prodant. Nam eamdem aëris quantitatem multo diutius respirationi inservire per experimenta comperi, si condensetur, quam si in majus spatium fuerit expansa, quod apprime respondet vaporum indoli, qui multo tardius per densiorem aërem expanduntur, eumque propterea tardius ita inquinare possunt, ut respirationi ineptum reddant (*e*).

XXIII Etsi autem vapores, qui respiratum aërem inficiunt, ipsius elasticitatem imminuant; hanc tamen elasticitatis jacturam noxiorum ipsius effectuum causſam haud esse demonstravi, quum & exigua sit, & in condensato, intercluſoque aëre animalia moriantur quo tempore intercluſi aëris pressio atmosphaerae pondere multo adhuc major exsistit, & in aperto etiam aëre, ubi non elasticitate, sed pondere aëris pulmones distenduntur, vapores exitiales sint (*f*). Addere possumus vapores alios, qui multo magis elasticitatem aëris infringunt, minus tamen esse pernicioſos.

XXIV Itaque ex consideratis phaenomenis animalium in intercluſo aëre exstinctorum, verosimile censui vi irritante

(*e*) Miscel. tom. II, p. 199, §. 21, 24.
„ Aër non renovatus perpetuo evadit lethalis non ob calorem, vel rare-
„ factionem, densitatemve, sed ob aliam occultam causſam. Boer.
„ inst. §. 203.
(*f*) L. c. §. 44, 49.

eum aërem nocere, propter quam bronchia, forte etiam pulmones convellantur, & ingreſſuro aëri reſiſtant; eodem nimirum nocere modo, quo BOERHAAVIUS, & SAUAGIUS mephitidis aut accenſi ſulphuris vapores ſuffocare exiſtimarunt (*g*).

XXV Et ſi vero pulmones ſenſu, & irritabilitate carere videantur, id de externa tantum ipſorum ſuperficie verum eſſe probabile eſt, quum interna vivido ſenſu inſtructa ſit, pari modo, quo externa cordis, & inteſtinorum ſuperficies parum ſentit, interna exquiſitiſſimo ſenſu pollet (*h*), & revera ſulphuris accenſi vapores, aliique, qui ſuffocationem afferunt, ſi per inſpirationem hauriantur, abſque damno in pectoris cavum immittuntur (*i*), quo ſolo experimento probatur inter ſenſum externae internaeque pulmonum faciei maximum diſcrimen intercedere (*k*).

XXVI Hactenus quidem fibrae verae carneae in ipſo pulmone demonſtratae non ſunt; certum tamen eſt fibras muſculares ab ipſa deorſum cartilagine cricoidea deſcendentes, & infra diviſionem bronchiorum deductas in pulmone evaneſcere (*l*); motus vero pulmonis in ranis aliiſque frigidis animalibus, qui etiam aperto thorace perſeverat, abſque hujuſmodi muſculari ſtructura explicari non poteſt, cujus vi intruſus in pulmonem aër a pulmone ipſo poſſit expelli (*m*).

XXVII Iis autem muſcularibus fibris reſolutis pulmonum actionem laedi, aut tolli innuunt experimenta in brutis

(*g*) L. c. §. 48.
(*h*) HALLER. el. phyſ. I p. 489.
(*i*) LANGRISH expériences ſur les bêtes.
(*k*) De ſenſu internae membranae trachaeae, quae ipſa in pulmonem propagari videtur. Confer HALLERUM el. phyſ. III, p. 148.
(*l*) HALLER. pr. lin. ed. ul. §. 238 el. phyſ. III. p. 147.
(*m*) Confer MALPIGH in poſth. p. 8, MORGAGNI adverſ. anat. V 29. p. 159.

viventibus inſtituta dum ligato nervo recurrente reſpiratio laeditur, & rariſſima fit, quamquam ab eo nervo nihil ad ſeptum veniat (*n*), & reſpiratio ſimiliter laeditur ligatis nervis octavi paris (*o*), a quibus maxima ex parte dependet (*p*); eaque propterea laeſio fibrarum pulmonalium paralyſi videtur aſcribenda (*q*): ſimiliter reſolutis propter cerebri morbum pulmonum fibris natum aſthma tribuunt MORGAGNUS (*r*), & WILLISIUS (*s*).

XXVIII. Contra a ſpaſmodica earum fibrarum contractione id aſthma oriri videtur, quod convulſivum dicitur, quodque ſubito invadit, & dimittit ſine phlegmatis excretione, frequenteſque habet recurſus (*t*), quod confirmatur eorum obſervatione, qui ſi retrorſum caput moverent ſtatim anheli fiebant; quod nimirum ſeri acris colluvies, quae deinceps cerebrum diſſecando inventa eſt, dum caput reclinarent, verſus nervorum pulmonalium originem relapſa illos vehementius urgeret (*u*). Ex conſtrictis etiam convulſiſque pulmonum fibris dyſpnoeam repetit RYDLEYUS, quae diu hominem vexavit, qui in cellam vinariam, ubi cereviſia fermentabat, imprudenter intraverat, quique ſine tuſſi diu ita manſit anheloſus, ac ſi omnia, ut ajebat,

(*n*) HALLER in BOER. IV p. 61 n. 5, & ibid. p. 100, not. 17.
(*o*) Idem irritab. p. 225 exp. 182, & p. 226 exp. 185.
(*p*) Idem irritab. p. 231 exp. 193, BARTH. anat. p. 423, 425.
(*q*) Nam ii nervi pulmoni proſpiciunt, non diaphragmati, ceteriſve reſpirationis muſculis. DUVERNEY poſth. II, p. 41. Animalia ſectis nervis cardiacis pereunt, quia pulmonum nervis, qui eadem vagina includuntur ſimul detruncatis, eorum inflammatorius tumor invadit. CHIRAC. de mot. cordis ſpecim. analyt. a p. 105 ad 109.
(*r*) De ſedibus epiſt. XV, §. 6, 7.
(*s*) Ex tali cauſſa WILLISIUS modo convulſiones repetit, modo paralyſes, & harum alterutras modo in ipſis pulmonum intimis fibris, modo in diaphragmate ſtatuit, aliiſque muſculis reſpirationi inſervientibus, MORGAG. l. c. §. 5.
(*t*) De GORTER ſyſtema prax. §. 331. HALES ſtatique des animaux exp. XII, §. 17, p. 75.
(*u*) MORGAGNI l. c. §. 4.

bat, intra pectus coarctarentur (*x*): propterea verosimile est pulmonalem etiam vaporem, quo intercluſus aër inquinatur, similem bronchiorum convulsionem inducere, & animalia in eo posita ex convulsivo asthmate interire.

XXIX Ex tali autem vi irritante respirati aëris (III) etiam deducitur, cur animalia diu spiritum cohibere non possint: nempe eadem causa, quae efficit, ut animalia in intercluſo aëre intereant, efficit etiam, ut ab aëre per diuturniorem inspirationem retento suffocentur (*y*). Hinc ergo necessitas alterni inspirationis, & exspirationis motus, ut aër vaporibus inquinatus expellatur, & novo aëri per subsequentem inspirationem hauriendo locum cedat (*z*).

XXX Rem mirifice confirmat HOOKIANUM ingeniosissimum experimentum, in quo aperto pectore, perforatisque pulmonibus, duplici folle per trachaeam aër in pulmones jugiter ita immittitur, ut, dum per pulmonis vulnera aër elabitur, novus continue impulsus succedat, sicque, & pulmonem in perpetua distensione servet, & defecturam animalis vitam diutissime sustineat (*a*).

XXXI Equidem fuerunt, qui contenderent, non esse necessarium in eo experimento, ut pulmo perforetur, aut saltem perforati pulmonis nullam mentionem habuerunt (*b*);

(*x*) Observ de asthmate p. 139, 140.

(*y*) HALLER el. phys. III, p. 258, 259. Ubi calculo instituto demonstrat, tantum intercluſi aëris intra datum tempus vitiari, quantum eo tempore per repetitas inspirationes hausturn fuit.

(*z*) DUVERNEY l. c. p. 84.

(*a*) Vid. BOER. praelec. I p. 452, §. 203 ad verbum *reciproce*, & IV p. I p.32 ad verbum HOOKII STEWENSON essais d'Edimbourg VI p. 472, 473 per integram horam animalis vitam in eo experimento sustentari. HALLERUS el. phys. III p. 248 ad duas, & plures. BAGLIVIUS, qui simile experimentum instituit de fibra motrice p 294.

(*b*) Perforati pulmonis non meminit RYDLEYUS (obs. de asth. p. 141) ubi HOOKII experimentum repetiit, nec BAGLIVIUS, sed is per intervalla aërem immisit, nec pulmones in perpetua distensione servavit (de fibra motrice app. p. 294): nec MUSCHEMBROEKIUS; indeque factum videtur, ut observaverit experimentum non succedere, nisi follis per *aliquot reciprocationes moveatur.*

quae tamen omnino eſt neceſſaria, ſi diutius animalis vita per novum aërem admiſſum fuerit ſuſtentanda, ſecus aut per vices pulmonem inflare, aut aërem alterne in pulmonem immittere, alterne ab ipſo haurire, oportebit, nec propterea pulmo conſtanter inflatus ſervabitur, quo tamen inprimis ingenioſiſſimum hoc experimentum videtur ſpectare. Hanc ipſam animadverſionem BOERHAAVIUS propoſuit, quod nempe HOOKIUS, ſi diutius experimentum protrahere vellet, cogeretur fodicare pulmonem, ut, veteri aëre expulſo, novum recentemque in ejus locum impelleret (*c*).

XXXII Quod ſi in eum tantum finem experimentum inſtituatur, ut pulſo ex pulmone ſanguine in cor, ſopitus cordis motus exſuſcitetur in ſtrangulatis ſuffocatiſve animalibus, vehemens per os aëris inſufflatio ſufficiens erit, quum ſemel ſufflaminatus cordis motus ſponte deinceps perennet, & reſpirationis organa integra ſint, ſicque exſuſcitatum motum ſervare queunt (*d*), ſecus ac in HOOKII experimento, in quo aperto pectore reſpiratio haberi amplius non poteſt, cui ut ſuppleatur, & vita ſuſtentetur non tantum diſtendi pulmo debet, ſed renovato aſſidue aëre repleri: unde omnino neceſſarium eſt, ut veteri foedatoque aëri per fodicatum pulmonem effugium concedatur, ex quo novo aëri in ipſum continue immittendo aditus patefiat.

XXXIII Igitur exſpiratio non propterea eſt neceſſaria, quod ſanguis per pulmonem conſtanter inflatum tranſmitti

(*c*) L. c. & DUVERNEYUS II. p. 84, STEWENSON l. c., LOWERUS de corde p. 162, 163.

(*d*) Quo ſenſu interpretatus fuiſſe videtur HOOKII experimentum THRUSTONUS, qui ipſum comparat cum experimento CROON, quo ſuffocatum pullum gallinaceum, immiſſo per trachaeam aëre, ſuſcitavit, & cum alio NEHEDAMII, qui ſtrangulatum canem immiſſo per ductum thoracicum flatu revocavit. (DIATRIBA p. 77).

non poſſit (e), ut multi cenſuerunt, ſed ut foedato aëri, ac irritanti novus, blanduſque ſuccedat. Hinc quemadmodum in hoc experimento animal, perpetuo inflato pulmone, vivit, ex eo quod aër novus aſſidue immittatur, ſic viciſſim in intercluſo, nec renovato aëre perit, quamvis inſpirationis, & exſpirationis motus alternet. Hinc, ceteris paribus, reſpiratio tardior celeriorve eſt prout aër denſior rariorve, citius, tardiuſve pulmonali vapore inquinatur, & in animalibus, qui intercluſum, propriiſque vaporibus jam inquinatum aërem reſpirant, celerrima evadit.

XXXIV. Quum vero in pulmone ſanguis plurimum evaporet, inde colligi poteſt ibidem eumdem refrigerari. Equidem in hac quaeſtione parum adeo conſentiunt phyſiologorum celeberrimi, ut in ſententias oppido contrarias abeant. Alii nimirum cum Galeno munus ſanguinem refrigerandi pulmoni tribuunt (f). Alii contra in pulmone ſanguinem calefieri affirmant (g); utrique vero ab eadem obſervatione diſcedunt: animalia omnia calida duplici cordis ventriculo, & pulmonibus inſtructa eſſe, ſecus vero frigida aut carere pulmonibus, aut tales habere, qui nonniſi partem ſanguinis e corde ejecti excipiant, atque tranſmittant. Hinc qui refrigerari in pulmone ſanguinem exiſtimant, iis tantum animalibus pulmonem datum eſſe conſtituunt, quorum ſanguis ob calorem, quo afficitur, re-

(e) Ob cauſſas varias apud varios auctores. Borellum (prop. CXIX) Sauagium (effets de l'air p. 44, & ſeq.) & Boerhaave (inſt. §. 619). At ex hoc ipſo experimento demonſtrat Hallerus, per pulmonem conſtanter inflatum ſanguinem commode tranſmitti (el. phyſ. III, p. 255) tum ex argumentis aliis (ib. pag. 257, 258).

(f) Refrigerationem pro praecipuo ſcopo reſpirationis habuit Hambergerus (Haller in Boerh. I, p. 433, not. q) & alii multi (apud eumdem el. phyſ. III, a p. 342, ad 344) tum Daoustenc (diſp. p. 681, § 41) Huxham (proleg. de aëre p. IV) Nehedam (in biblioth. Manget. I. p. 566).

(g) Auctores citandi nota ſeq.

frigerio egens eſt (*h*). Qui contra calefieri opinantur, ideo animalia calida eſſe docent, quod ſanguis, dum per ipſorum pulmones trajicitur, plurimum calefiat, eaque propterea frigeſcere, quorum ſanguis aut omnino non, aut ex parte tantum pulmonis vires experitur (*i*); hancque opinionem confirmant ex alia neque incerta; in pulmone maximum fieri attritum ſanguinis ad vaſa, ex quo maximus in eodem calor excitetur (*k*).

XXXV Verumtamen attritus in pulmone non quidem major, ſed minor potius, quam in ceteris partibus: neque enim attritus aut copiae tantum, aut velocitati ſanguinis reſpondet (*l*), ſed omnino pendet a reſiſtentia viae, per quam movetur, & ab exceſſu celeritatis majori minorive ſanguinis a tergo urgentis ſupra praecedentem ſanguinem, unde adverſus vaſorum latera poſterioris ſanguinis vis reflectatur. Verum in animalibus, quamdiu reſpirant, via per pulmonem omnino libera eſt, & brevis, & minimae ſunt reſiſtentiae (*m*). Hinc vis ventriculi cordis dextri ſanguinem per pulmonem pellentis multo minor a natura conſtituta eſt, quam ſiniſtri (*n*); ex quo confici-

(*h*) Boerhaave (in prael. ad §. 200, 7 ad verbum calor. I, p. 437.) (Buffon hiſt. natur. IV. p. 129 &c.)

(*i*) Plerique auctores citati nota *b*.

(*k*) Ex Halesio in ranae pulmone celeritatem ſanguinis 43 majorem eſſe, quam in reliquo corpore, hinc majorem attritum, & majorem calorem gigni (Schwenke (Hematol. p. 15). Attritum, & fluiditatem majorem in pulmone ponit Boerhaave (inſt. §. 200, 7, & 206, 208,) (& in prael. hic): Winslow (de pector. §. 154) Daoustenc (diſp. p. 547) Muschemb. (diſp. p. 612) Keillius (de ſecret. p. 60, 61).

(*l*) *Sauvages ſur l'inflam.* §. 82.

(*m*) Ex eo ipſo, quod obſervante Halesio ſanguinis velocitas in ranae pulmone 43 major ſit, ingenioſe concluſit Cl. Hallerus, minorem ibi reſiſtentiam adeſſe, quum ab eadem unici cordis vi quaquaverſus ſanguis pellatur. In Boerh. I, not. *r*. ad §. CCXV.

(*n*) Winslow de pectore §. 51.

tur exiguum in pulmone attritum haberi (*o*). Huc accedit pulmonem viſcus ſuapte natura molle, cedens, ſpongioſum eſſe, & pulmonalem arteriam ceteris molliorem, ac propterea minime aptam calori ex attritu excitando (*p*).

XXXVI. Rurſus obſervat LOWERUS in HOOKII ſaltem experimento, in quo conſtanter pulmo inflatus perſtat (IX), minimum in ipſo attritum haberi, quum interim animal aeque caleat (*q*); & in pullo progreſſu incubationis calorem ex interna cauſſa naſci animadvertit STEWENSONUS, licet nulla adhuc ſit reſpiratio (*r*); & demum adnotat Cl. HALLERUS pulmone obſtructo, ulceroſo, pene deleto, morboſum tamen calorem prodire (*s*).

XXXVII. Contra refrigerari in pulmone ſanguinem vel ipſe perpetuus frigidi aëris, ac fere immediatus, & quidem per amplam pulmonis ſuperficiem ad ſanguinem attactus, ſuadere videtur, ex quo plurimum caloris in eum aërem diffundi debet, ac diſſipari (*t*), & HALESIUS quidem quantum inde caloris ſanguini decedat, ſubductis

(*o*) Ab aëre impetum fieri in pulmonem, aut ſanguinem in eodem comminui negat BERNOULLI (diſp. p. 621) LOWERUS (de corde p. 163). Attritum in pulmone non eſſe majorem. HALLER. (el. phyſ. III a p. 235 ad 238) & parum tribuendum eſſe aëris preſſioni (ib. p. 358 n. *r*, *ſ*) nec calorem in eodem generari (ib. p. 360).

(*p*) *Contra majorem in pulmone attritum nuper Cl.* GUENET *diſſertationem ſcripſit, in qua & parvitatem viſceris, & paucitatem vaſorum, & minus ſpatium percurſum, & molliorem pulmonis arteriam conſiderat.* HALLER in addend. t. VIII el. phyſ. p. 162.

(*q*) De corde (p. 163) eadem eſt obſervatio STEWENSONI (eſſais d'Edimbourg VI, p. 472, 473; & ſeq.).

(*r*) Siquidem gallina ova deſerere poteſt per tempus, quod refrigerandis ovis ſufficeret, niſi internam caloris cauſſam haberent (l. c. p. 479)

(*ſ*) Pr. lin. §. 278, edit. ul. el. phyſ. II, p. 58, 312, 318.

(*t*) Aliqua pars caloris tranſit in aërem. HALLER. in BOER. n. *q*. ad § 200, I, p. 433, & prim. lin. § 278, calorem ſanguinis ex ſuppreſſa reſpiratione intra ſemihoram 1 273 augeri.

calculis inveſtigavit (*u*). At non ea tantum ex cauſſa refrigeratur in pulmone ſanguis, quod frigidum aërem contingat, ſed ex eo maxime, quod plurimum exhalet; a qua exhalatione vel in ipſo vacuo corpora vehementer refrigerari a Cl. CULLENIO nuper eſt demonſtratum (*x*).

XXXVIII Hinc provide natura videtur utramque utilitatem & refrigerii, & exhalationis pulmoni tribuiſſe: nam quo calor major eſt, eo plures etiam progigni debent partes per exhalationem eliminandae. Ex quo intelligitur cur reſpiratio, ceteris paribus, eo celerior ſit, quo calor ſanguinis major eſt (*y*), & item eo celerior, quo magis calor aëris ad ſanguinis calorem appropinquat (*z*).

XXXIX Inde vero phoenomenon aliud commode explicari poſſe videtur; quod a DOUGLASSIO eſt obſervatum: ſani nimirum hominis calorem eumdem propemodum remanere, quicumque fuerit calor ambientis aëris, aut balnei, in quod homo fuerit demerſus (*a*), quod ſane vi-

(*u*) HAEMASTAT exp XIII a p. 82 ad 88. Calculum hunc parvi facit SENAC. (du coeur II, p. 256): de hoc etiam HALLER. el. phyſ. III, p. 346.

(*x*) Vid. Miſcel. II, p. 143, & ſeq. Inde caloris deperditio multo major HALESII aeſtimatione.

(*y*) Quum calefcimus, magnas, & frequentes reſpirationes edimus; contra quum frigore vexamur, lentas, & parvas: ergo reſpiratio non ad calefaciendum ſanguinem, ſed ad eumdem refrigerandum data eſt. STEWENSON (eſſais d'Edimbourg VI, p. 479) In ardentibus febribus cum rubore faciei, reſpiratione frequenti, pulſu pleno, & frequenti, aperta feneſtra, frigidiorique aëre reſpirato, rubor minuebatur, pulſus minus plenus, reſpiratio minus frequens evadebat, etſi ſtragula eadem perſtarent, (id. ib.). Similia apud NEHEDAM, (in bibloth. Mang. I, p. 566).

(*z*) Si aër frigidus, reſpiratio ſenſibilis, ac fere ſuſpenſa, contra ſi ambiens calidus, reſpiratio fortior erit, ac frequentior. POISSONERIUS (traité des fiévres de s. DOMINGUE p. 25, SIGAUD. II, p. 61, 62. Similia STEWENSON eſſais d'Edimb. VI, p. 320, DIEMERBROEK lib. II, c. 23, p. 416.

(*a*) Eſſai ſur la génération de la chaleur dans les animaux, qui liber ex Anglico converſus, & adjectus verſioni. Diſſert. MARTINI p. 253, & ſeq. Eius obſervatio nuper confirmata eſt a BRAUNIO. Nova commen. Acad. Petrop. tom. XIII, p. 420, 423.

detur repugnare notiſſimis calefactionis, ac refrigerationis legibus. Nam quum intrinſeca cauſſa in homine, aliiſque animalibus aſſidue calorem gignat, eo plus caloris in ipſo accumulari oporteret, quo minus is calor per vicina corpora diſſipatur; quum vero eo minus diſſipari debeat, quo ambientium calor major eſt, & animalis calori proximior, major propterea etiam eſſe deberet caloris ex interna cauſſa nati retentique accumulatio.

XL Douglassius quidem eam animalis caloris conſtantiam tribuit mutationi, quam ex calore ſubeunt vaſa capillaria, quae inde dilatata laxataque minori cum attritu ſanguinem tranſmittant, unde minor calor producatur (*b*), ſed multo ſimplicior ex reſpiratione ejus phoenomeni explicatio deducitur, quum, quo calidior ſanguis eſt, eo citatior fiat reſpiratio, hinc & plus ſanguinis per pulmonem trajici debeat, & eodem tempore plus frigidi aëris in pulmones attrahatur citius expellendus, & plures exhalationes ex ſanguine erumpant, (*c*), quibus eo magis refrigeretur (IX), ut ſic eadem neceſſitas mechanica, quae magis citato ſanguinis motu citatiorem reſpirationis motum efficit, ut is ſanguis ea majori celeritate per pulmonem tranſmitti poſſit, efficiat etiam ſecundario, ut idem ſanguis plus caloris diſperdat, ſicque aequabilem fere ſanguinis calorem ſervet. Similis in hoc ſanguis mihi eſſe videtur ebullienti aquae, quae quocumque addito calore, ulterius calefieri nequit, dummodo evaporare poſſit: nam prout major calor additur aucta proportionaliter exhalatio parem ejus quantitatem diſſipat: ſic pro ut ſanguinis calor auge-

(*b*) L. c. p. 272, & ſeq.

(*c*) Minime dubium videtur aërem per reſpirationem renovatum evaporationem ſanguinis promovere, non ſecus ac renovatus per ventum majorem efficit evaporationem liquorum, qui eidem exponuntur, & in Hooxii quidem experimento reſpirationis vices gerit artificialis ventus per pulmonem trajectus, vaporemque pulmonalem abripiens.

tur, & calor ipſe, & citatior reſpiratio (XVII) copiofiorem exhalationem producet; quare proportionaliter major fieri debet caloris deperditio, & propemodum uniformis ſanguinis calor ſervari (XVII).

XLI Illud vero propoſitam ſententiam refellere videtur, quod ſanguis venoſus arterioſo calidior per certa experimenta non fuerit demonſtratus, quod tamen eſſet neceſſarium, ut conſtaret, arterioſum ſanguinem a pulmone refluum concepti caloris partem in eo viſcere depoſuiſſe (*d*). At, ſi quod diſcrimen caloris inter arterioſum venoſumque ſanguinem eſt, illud eſt, quod ex uno tantum ſanguinis per pulmonem trajectu proficiſcitur, quum ad ſingulas circuitiones ſanguis per pulmonem agatur. Jam vero tempus, quod in unoquovis per pulmonem trajectu ſanguis inſumit, exiguum eſt (*e*), exiguamque afferre poteſt caloris jacturam (XVI). Nihil mirum igitur adeo parum inter ſe conſentire experimenta, quibus viri Clariſſimi eamdem inveſtigarunt (*f*). Perſpicuum nimirum eſt quodcumque aut in celeritate ſanguinis, dum educeretur, aut in materie, figura, calore vaſorum, quibus excipiebatur, aut in promtitudine thermometrorum, quae adhibebantur (*g*), diſcri-

(*d*) HALLER in BOERH. not. *q* ad §. 200 inſtit. I, p. 433, & in prim. lin. §. 282, & el. phyſ. III, p. 346.

(*e*) Ex calculo Cl. HALLERI quaelibet unda ſanguinis 12 pulſuum intervallum in pulmone trajiciendo abſolvit. In BOER. not. *g* ad §. 208, I, p. 457.

(*f*) Sanguinem venae jugularis calidiorem invenit STEVENSONUS ſanguine carotidis, ſed differentia nimia fuit, ut in eo experimento ſe errorem admiſiſſe auctor dubitet. Eſſais d'Edimb. VI, p. 454. Calidiorem etiam invenit DAVID. in diſp. quae praemium Acad. de Rouen obtinuit, p. 98, frigidiorem contra duobus tribuſve gradibus invenit SCHWENCKE hemtol. p. 30, 31, & ARBUTHNOT de aëre p. 60. Quum Cl. SIGAUD experimentum bis coram idoneis teſtibus coepiſſet ſe nullum diſcrimen inveniſſe affirmavit. Oeconom. animal. I, p. 313.

(*g*) Notum eſt quam tarde thermometra in primis paullo majora ultimos caloris gradus excipiant, quum jam calorem ambientis medii calori proximum acquiſiverunt.

discrimen experimento turbando suffeciſſe, & alium aliumque exitum producendo (*h*). Etsi vero paucos tantum caloris gradus singulis per pulmonem circuitionibus sanguis amittat, quum tamen pluries in hora universa sanguinis massa eam viam relegat, id vel satis esse poterit ejus fervori temperando, eidemque intra certos limites continendo (XIX): sic intra certos limites contineretur calor penduli ex calidiori medio in frigidius oscillantis, etsi discrimen ex quovis itu vel reditu productum parum sensile esset. Profecto videretur natura temere pulmonem calidis praesertim animalibus conceſſiſſe (XIII), si ad calorem moderandum nihil pulmo conferret.

XLII Illud etiam propositae opinioni adversari videtur (*i*), quod animalia vivere possint in aëre ipsorum sanguine calidiori (*k*). Ut animalia in eum aërem translata aequalem primum ipsi calorem concipiant necesse est, quem admodum cetera inanimata corpora in eum immersa, mox ex continuata actione causae nativum in ipsis calorem producentis novo calore cumulabuntur, quo ambientis calorem superabunt; quum vero ambientis calor jam consueto major, & animalibus incommodus sit, si interim novam hanc caloris acceſſionem, quam ex interna causa assidue accipiunt, disperdere per respirationem non possint (*l*),

(*h*) In pulmone sanguinis calorem servari Boerh. inst. §. 200, 7, nec calefieri, nec refrigerari Bernoulli disp. p. 642: eademque est opinio Cl. Poissonerii, & Sigaud. (oeconom. animal. II, p. 59, 60.

(*i*) Bergerus de natura humana, p. 54.

(*k*) Calor ordinarius in tepidariis Russicis est $106\frac{1}{2}$ Farenheith., maximus 116 (Braun. l. c. p. 431) Cl. Righmannus tamen calorem 125 ferre potuit (ib.) quod sane mirum, quum canes ex calore 115 perierint (ib. p. 432).

(*l*) Demonstratum a Cullenio est, evaporationem, qualis per pulmonem fit, non solum aptam esse citius refrigerandis corporibus, verum etiam per ipsam ad calorem minorem, quam sit ambientis calor evaporantia corpora perduci posse.

conſequens eſt, ut ex nimio congeſto calore in vitae diſcrimen adducatur (*m*). Si igitur reſpiratio utilis ſemper eſt ad aequabilem ſanguinis calorem ſervandum (XIX), hic maxime videtur neceſſaria ad praecavendum, ne calor jam maximus, & funeſto proximus adaugeatur, necemque animalibus inferat. Hinc in eo calore animalia vehementius frequentiuſque reſpirant, ut eo efficacius imminens periculum avertant (XVII).

XLIII. Ex hactenus dictis jam licet definire, in quo neceſſitas reſpirationis, in quo ipſius utilitas ſit collocanda (*n*). Nempe neceſſitas reſpirationis in eo ponenda eſt; quod in exſpiratione quidem compreſſus pulmo ſanguinem non tranſmittat, in diuturna autem inſpiratione aër non renovatus, vaporibuſque onuſtus, convulſionem in pulmone exciter, unde ſimiliter tranſmittendo ſanguini ineptus evadat (III). Neque multum ab hac neceſſitate utilitas reſpirationis videtur diſtare, neque alium finem natura in condendo pulmone ſibi propoſuiſſe, niſi ut irritantem moleſtumque vaporem, qui ad exſpirationem nos cogit, expelleret, & conveniens inde ſanguini refrigerium afferret (XIII, & ſeq.).

XLIV. Et utrique quidem utilitati conſuluiſſe videtur in conſtruendo calidorum animalium pulmone: in his enim quum ob majorem attritum, caloremque exhalatio major requireretur & refrigerium; idcirco omnem ſanguinem per pulmonem trajici voluit. In frigidis vero animalibus ob idipſum partem tantum ſanguinis ad pulmonem videtur

(*m*) Ex ſeri coagulatione, ſanguinis corruptione &c.

(*n*) „ Sed a neceſſitate reſpirationis differt ipſius utilitas: illam natura vi-„ taſſet pulmone, aut nullo facto, aut tali, qualis in foetu eſt. Hal-„ ler pr. lin. §. 276. Compendioſa natura unicum cordis ſinum „ effeciſſet, quum ad generalem circulationem nil conferat proclum „ pulmonicum. Fanton. edit 2, p, 341. Similia Borellus part. II, prop. 3, p. 240, Bernoulli diſp. §. 4, p. 631.

distribuisse, quod altera respirationis utilitas, nempe refrigerium, in ipsis locum non haberet; altera autem, seu exhalatio minus urgeret, quam in calidis, neque adeo constans, aut copiosa requireretur.

XLV. Et tamen in his ipsis animalibus exhalationi naturam prospexisse constat, eumque imprimis usum eorum pulmoni tribuisse (*o*). Et revera ranas sub aquis ligatas interire observavi, & sive sub aquis, sive in intercluso corruptoque aëre respirare, & magno labore aquam, vel corruptum aërem haurire, & licet primum in intercluso aëre, ipso adhuc integro, nonnisi per intervalla ad superficiem aquae ascendant respirandi causa, sub finem, aëre jam foedato, magno nisu constanter ad aquae superficiem se sustinere, ut ibi frequenti, ac laboriosae respirationi incumbant, iisdem nimirum symptomatibus affici, quibus calida animalia in similibus adjunctis vexantur, ac tandem interire; durationem vero vitae earumdem intercluso aëris quantitati respondere (*p*).

XLVI. Jam vero quum in his animalibus, etiam intercepta per pulmonem via sanguinis circulus perseverare queat, evidens est talem anxietatem, & respirandi conatum, & laboriosam respirationem in intercluso aëre, ac natam inde suffocationem non aliunde nisi ex sublata respirationis utilitate esse repetendam, adeoque suppressos vapores ab aëre jam ipsis saturato (*q*) eos esse, qui pulmonem vellicent (*r*); eamque respirandi necessitatem indu-

(*o*) Opinionem Entii, qui putatitios ranae pulmones esse contendebat, refutat Thruston Diatriba p. 142, Malpighius l. c. p. 10.

(*p*) Miscel. Taurin. II, §. 11.

(*q*) Respiratum aërem exitialem esse, quod perspiratione pulmonali jam saturatus ipsam supprimat, Franklinus (trans. philos. an. 1766, *V. journal encyclop.* ejus anni 15 novembris).

(*r*) Aërem a ranarum respiratione similiter inquinari, ac a respiratione calidorum animalium, vel ex eo confirmatur, quod is aër flammam similiter exstinguat. Misc. I, p. 48.

cunt (*f*), forte etiam reliquum ſanguinem inquinent, iiſdemque tandem interitum inferant.

XLVII Boerhaawius cenſuit ad eruendam utilitatem reſpirationis plurimum lucis afferre poſſe conſiderationem animalium in aëre intercluſorum (*t*), ſed in his mors non tam ſublatae reſpirationis utilitati, quam impeditae neceſſariae ſanguinis tranſmiſſioni tribuenda eſt. Quare ſperavit Cl. Hallerus ex animalibus, quibus viae foetus apertae perſtant, ejus quaeſtionis ſolutionem potius eſſe exſpectandam (*u*): ſed amphibia animalia, de quibus agimus, minorem adhuc habent reſpirandi neceſſitatem, quum ſanguis per ipſorum pulmonem tranſmitti non debeat, propterea aptiſſima ſolvendo problemati mihi videntur, & propoſitae ſententiae confirmandae.

XLVIII Et hunc quidem praecipuum pulmonis uſum eſſe, ut perſpirationi inſerviat, jam olim Galenus docuerat (*x*): ejus tamen opinionem recentiores plerique deſeruerunt, quod hujuſmodi halitum mere aqueum eſſe arbitrarentur (*y*). Verumtamen non mere aqueum eſſe oſtendunt perſpirati per cutem humoris acrimonia, & morbi ex eo

(*f*) Quum ranae etiam aperto pectore reſpirare pergant, curioſum eſſet in corrupto aëre pulmonis motum in ipſis obſervare.

(*t*) „ Interim aër praeter modo dicta aliquid reſpiranti praeſtat: nam non „ renovatus perpetuo evadit lethalis non ob calorem, vel rarefa„ ctionem, denſitatemve, ſed ob aliam occultam cauſſam. Inſtit. §. 203.

(*u*) „ Si foramen ovale ampliter in adulto homine, ut videtur poſſe, non„ nunquam pateret, diligens annotatio hujuſmodi fabricae poſſet „ aliquid forte lucis ad pulmonum utilitatem accendere. El. phyſ. VIII, p. II, p. 14.

(*x*) De uſu partium lib. VI, cap. 16. Ignis & animalium reſpectu hunc eſſe aëris uſum, ut exhalantes partes excipiat. Morgan. (eſſais d'Edimb. IV, p. 595). Vide conſentientes auctores apud Hallerum (el. phyſ. III, p. 355, n. *a*).

(*y*) Boerh. inſtit. §. 202, & in praelect. hic ad verbum *fuliginis* I, p. 448, & iterum in prael. ad §. 203 ad verbum *renovatus* I, p. 451, Borellus prop. 97, p. 281.

repercuſſo, & ſimilitudo ejuſdem cum urina, & odor, per quem canes dominum facile diſtinguunt (ζ), & morbi, qui ex hominibus in anguſtum ſpatium ſtipatis naſcuntur (*a*), & reſpirati aëris indoles animalia ſuffocans, ac flammam exſtingens, & foetor ipſius aëris a LAGHIO obſervatus (*b*). Neque exiguam eſſe ejus halitus pulmonalis quantitatem ex HALESII experimento conſtat, quo aequalis propemodum cutaneae perſpirationi ſtatuitur (*c*). Ex his eruitur in pulmone non alkaleſcentiam produci, ut HELMONTIUS exiſtimaverat (*d*), ſed alkaleſcentes putridas partes calore, & attritu in ſanguine genitas per pulmones exhalare, ideo alkaleſcentiae indicia in eodem potiora haberi. Et animalia frigida, quibus attritus minor eſt, minorque perſpirationis pulmonalis neceſſitas, aliquamdiu reſpiratione carere poſſe (XXIV), & inſecta abſque pulmone per trachaeas in univerſum corpus diſperſas eamdem perſpirationem, eamdemque utilitatem conſequi (*e*), ac demum ſtirpes, abſque ullo

(ζ) HALLER. el. phyſ. II, p. 37, 38, III, p. 3, 354 ab ſad a.
(*a*) HALLER. el. phyſ. l. c., & pr. lin. §. 290, 267.
(*b*) Vid. Miſcel. II, p. 199.
(*c*) Vid. eſſais d' Edimb. II, p. 495.
(*d*) HELMONT Blas humanum §. 45, p. 180. Confer BOERH. inſtit. § 211, & in prael. hic ad verbum *volatile* I, p. 460.
(*e*) De his PERRAULT eſſais III, p. 278, 279, DUVERNEY poſth. p. 83, 86, LYONNET oſſervaz. alla teologia degl' inſetti del signor LESSER I, p. 105, 106, 108, II, p. 73. Per eas trachaeas aërem recipere, & emittere ex dilatatione, & conſtrictione corporis alterna, qua aliquot gaudent PERRAULT (l. c. p. 278), tum ex eo quod oleo inunctae pereant, obſtructis ſcilicet ſtigmatibus (ib. p. 277). Pleraque inſecta aquatica frequenter ad aquae ſuperficiem feruntur, & caudam emittunt, ut reſpirent; ſi aqua cooperiatur, ſundum petunt, & pereunt (LYONNET l. c. p. 105). De modo vero, quo aërem per trachaeas exſugant, dein expellant, conjecturas propoſuit FANTONUS (edit. II, p. 340). Jam vero quum vacuum multa inſecta impune ferant, hirudo (BOYLE phyſ. pneum tit. 17, exp. 2, p. 456) papiliones (ib. tit. 19, exp. 6), vermes ſponte in lacte nati, (id. phyſico mech. cont. II, not. X, exp. 10), inſecta hexapoda, quae *liliorum floribus* nutriuntur (MUSSCH. in Florent. p. 48, 49), ſcarabaeus, impennis, tardipes (id. introd. §. 2166). Quum etiam ab intercluſo aëre non laedan-

hujuſmodi machinamento (*f*), per amplam foliorum ſuperficiem hanc ipſam exhalationem emittere, quae propterea eo ſenſu non male cum exhalante ſuperficie pulmonum fuerit comparata, quod vicariam his ipſis utilitatem afferat (*g*).

tur (Basin. apud Haller. in Boerh. IV, p. 90, not. 39 ſub fin.); contra oleo inuncta pereant, perſpicuum eſt non tam defectu aëris perire, quam ex coërcito intra corpus infenſo humore, qui per ſtigmata exhalare debuiſſet: nam ea exhalatio oleo coërcetur, in vacuo liberior evadit, ſpatium autem vacuum, aut etiam aëre plenum licet exiguum nonniſi tardiſſime exhalante parvorum animalculorum vapore ita repleri poterit, ut novum erupturum vaporem coërceat.

Quod ſi quaedam inſecta in vacuo moriuntur, id tribuendum videtur cauſſae a Lyoneto propoſitae, ea nempe ab interno humorum aëre exitum non inveniente, ſublata externi aëris preſſione ſuffocari l. c. 1 p. 105; ſed ut eo revertamur, unde diſceſſimus, chryſallides ſaltem aliquas non reſpirare, quamquam trachaeis inſtructae ſint, Lyonnetus demonſtrat (l. c. p. 102, 103) & cenſet ſtigmata in iis aperta inſervire tantummodo ad excedentis humoris evaporationem (ib. p. 103); quod pro certo haberi poſſet, ſi conſtaret has etiam chryſallides oleo inunctas perire, quemadmodum de chryſallidibus generatim docuit Reaumurius (hiſt. des inſect. I, p. 401),

Ex quibus illud erui poſſe videtur etiam quando inſecta reſpirant, trachaeas eidem uſui inſervire, ſed alternam in eiſdem aëris admiſſionem, & expulſionem copioſiori evaporationi favere, qualis exſpectari debet ab animali magis vivido, quam ſit chryſallis.

(*f*) Eaſdem eſſe fiſtulas, quae devehant ſuccum nutritium, & aërem (Borel. epiſt. ad Malpigh. in poſth. p. 25) qualis eſt etiam conjectura Cl. Duhamel (phyſique des arbres I, p. 43, 173) qui cenſet officium, quod a Malpighio trachaeis ſtirpium, ſic dictis, tribuitur, ſola analogia inniti, nec ſatis demonſtratum eſſe (ib. p. 44): idemque adnotat aërem non ſolum per ea vaſa, ſed etiam per vaſa ſtirpium propria, ſeu lymphatica facile tranſmitti (ib. p. 77), & exiſtimat ipſum aërem ſtirpes ſubire ſucco nutritio admixtum, interdum per folia, copioſiſſime vero per radices (ib. p. 173, 177).

(*g*) Grew. Duvernet II, p. 89, Hales ſtatique des veget. paſſim. Hinc eſt, ut in Papini experimento ſtirps pereat, ſi integra vacuo includatur; diutiſſime vivat, dummodo folia extra vacuum recipiens in liberum aërem emergant (Duhamel. l. c. p. 169, 170.) Hinc etiam eſt, ut non in vacuo ſolum, ſed etiam in intercluſo aëre ſtirpes pereant. (Confer Boyle experimenta phyſico-mech. cont. II, Musch. introd. §. 2171), mucor tamen in intercluſo aëre vivat, niſi vaſa, quibus includitur, admodum ſint anguſta (com. Bonon. III, p. 42, 43).

XLIX Alia proculdubio pulmonum, & respirationis utilitas vox est, quae exspirati aëris actione absolvitur (*h*). Haud tamen videtur natura hunc finem aut solum, aut primario sibi proposuisse in pulmone efformando. Nam & pulmo qualis frigidis animalibus datus est, voci efformandae suffeciſſet (*i*); & animalia sunt pulmone instructa, quae tamen vocem nullam edunt (*k*), & insectorum trachaeae pulmonis vices gerentes, voci tamen non inserviunt (XXVII). Demum frigida animalia, quae unico cordis ventriculo instructa sunt, respiratione carere diutissime possent, si nullam aliam praeter vocem, & natatum a pulmone utilitatem acciperent (XXV).

L Alias secundarias, easque manifestas respirationis utilitates, suctum, olfactum, excreatum, sternutationem, oscitationem consulto omittimus, de quibus conferri merentur, quae luculentissime a Cl. Viris tradita habentur (*l*). Una tantum restat in controversia posita respirationis utilitas, aëris scilicet elastici in sanguinem ingressus, quam tanti fecerunt recentiores nonnulli, ut in hunc imprimis finem conditum esse existimarent: ex tali enim aëris cum sanguine miscela sanguinis fluiditatem (*m*), colorem (*n*) ca-

scilicet in spatio clauso, sive vacuo, sive aëre pleno foliorum perspiratio cohibetur, ubi semel illud spatium exhalante vapore fuerit refertum, nisi stirps admodum exigua sit, quemadmodum mucor, quae nonnisi tardissime intercluſum spatium suis exhalationibus replere possit, uti de insectis dictum not *v* praeced. Confer Misc. II, §. 44, p. 196.

(*h*) Vocis modulationi, & olfactui Nehedam. p. 566, c. 1, Bibliot.

(*i*) Vox buffonis clara, & dulcis. Perrault. (l. c. p. 134.)

(*k*) Camaleon, testudo. Perrault. (l. c.). Testudo animal absolute mutum Bomar. diction. V, p. 467.

(*l*) Confer Hallerum el. phyſ. III.

(*m*) Thruston. l. c. p. 62, 63, aliique permulti, quos Hallerus recenset el. phyſ. III, p. 331, 332 a not. d ad k.

(*n*) Lowerus, Elvetius, alii.

lorem (*o*) imo & progreſſivum (*p*), inteſtinum motum, & vitam ipſam pendere nullatenus dubitarunt, aliis ita adverſantibus, ut vel ipſius aëris elaſtici in ſanguine praeſentiam omnino inficiarentur (*q*). De qua quidem quaeſtione non prius licet differere, quam de aëre liquorum generatim nonnulla a phyſicis petita attulerimus.

CAP. III

De aëre liquidorum, in ſpecie de aëre ſanguinis.

LI Aër in liquidis pleriſque continetur (*r*), ita diviſus, ut bullarum ſpecie conſpici non poſſit. Sublato aëre externo ab ipſorum poris erumpit, bullaſque conſtituit (*s*), ejus quantitas in liquidis variis definita hoc pacto eſt (*t*): ac praeterea obſervatum liquida, e quibus hauſtus aër eſt, eumdem iterum ſorbere, principio celerius, dein tardius (*u*),

(*o*) MALPIGHI, l. c. p. 18. FANTON edit. II, p. 343. DUVERNEY II, p. 478, & 507, 509.
(*p*) MERY mem. dell' Acad. 1700, p. 222, 223.
(*q*) BOERH. in prael. §. CCI, p. 443, I ad verbum *oſcillatione*.
(*r*) BOYLE phyſico mech. ab exp. 20 ad 25 p. 43, & ſeq.
(*s*) BOYLE l. c. MUSCHEMB. introd. §. 2162.
(*t*) BOYLE l. c. exp. 24, BOERHAAWE ch. 1 p. 273, MUSCHEMB. l. c. §. 2165. In aqua HALESIUS poſuit $\frac{1}{54}$ vol. (ſtatique des végétaux append). NOLETIUS $\frac{1}{30}$ (Mém. de l'Acad. 1743 p. 215). Forte diverſitas in exp. a diverſitate caloris.
(*u*) In aquam nonniſi decem horis penetrat (MUSCHEMBROEK diſp. §. 2) Quum MARIOTTE nonniſi 20 diebus penetrare in aquam docuiſſet, NOLLETIUS autem 6 diebus (l. c.), concludit du Tour id conſtans non eſſe, ſed pendere a quantitate aquae, & ab amplitudine ſuperficie per quam aër introditur (Mém. préſentée II p. 448): Confer NOLLETIUM leçon X exp 20, MUSCH. introd § 1478, HAUKSBEE II p. 479. DEMAREST ib. p. 407, BOERHAAWE (ch. I p. 273, MAIRAN *de la glace* p. 191.

ac demum ipso saturari, ut nullum recipere amplius possint (*x*). Educto aëre liquidorum volumen non minuitur (*y*), nec eodem in liquida subeunte horum volumen augetur (*z*). Augetur autem interea dum erumpit adeo, ut liquida tunc temporis specifice leviora fiant (*a*): etsi vero liquida aëre saturata sint, haud minus incompressibilia sunt, quam illa, quae aërem nullum continent (*b*), aër hic non solum sublata externa pressione e liquidis prodit, sed etiam calore (*c*), aut igne electrico (*d*), aut congelatione (*e*), aut percolatione (*f*), aut ex alto delapsu (*g*).

LII Ex quibus perspicuum est aërem sola gravitate aut elasticitate sua liquidorum poros subire, donec uniformiter per ipsa fuerit distributum (*h*). Hinc 1° prout sensim in poros subeuns aër densior sit ejusdem subeuntis celeritas imminuitur, donec tandem densitas, & elasticitas recepti in poros aëris densitati, & pressioni ambientis aequalis evaserit, quando liquida jam nullum amplius aërem admittunt, eoque saturata dicuntur. 2° Aër hujusmodi quoniam in poros liquidorum incompressibilium recipitur, in-

(*x*) Auctores mox cit., Boerhaawe praelec. ad § CCI p. 441 ad verbum *elastice*.
(*y*) Hales l. c exp 2 n 7 p. 337, 338.
(*z*) Mairan l. c. p. 138, Musch. introd. § 2165.
(*a*) Boyle l. c. exp. 25, Musch. l. c. § 2165.
(*b*) Eller Acad. de Berlin 1750 p. 69, 70, 71.
(*c*) Mairan l.c.p.185. Boerhaawe ch. 1 p. 274 exp. 6 Mussch. introd. § 1455.
(*d*) P. Belcaria el artif. § 400 let. VI, §. 188.
(*e*) Mairan l. c. a p. 287 ad 290.
(*f*) Du-Tour l. c p. 492, 493.
(*g*) Muschemb. introd. § 1477.
(*h*) Partes aëris instar spongiae aqua repleri (Muschembroek introd. II, § 1480) aërem aquae poros subire, uti vini spiritus eosdem subit (Mairan l. c. p. 135), sola gravitate liquorum poros subire (Du-Tour l. c. p. 477), tum Venel ex eo in primis, quod agitatione is aër excuti nequeat, quum revera aquae pori ob agitationem locum quidem mutent, sed nec coarctari, nec deleri possint (Mem. presentées II, p. 88).

compreſſibilis eſſe debet: nam comprimi nequit, quin pori, quibus continetur, coarctentur, atque adeo quin liquidum ipſum comprimatur. 3° Et ſimiliter liquidorum volumen ipſis adjectum augere nequit, quum in interſtitia partium tantummodo recipiatur. 4° Quoniam vero in liquidorum poros aër hic nonniſi lente penetrat, neceſſe eſt reſiſtentiam pati ab anguſtia pororum, quos ſubit. 5° Eamdem reſiſtentiam, quam patitur aër exterior, ut poros pervadat, pati debet aër poris incluſus, quando ab iiſdem erumpere nititur. 6° Hinc dum praevalente vi ſua erumpit, anguſtia pororum impeditus, liquida expandet in majus volumen, undas, & bullas in iiſdem excitabit. 7° Id vero fit quotieſcumque elaſticitas aëris in poris contenti major fiet preſſione ambientis. 8° Fiet autem major, ſi aut translatione rariorem aërem, vel anthlia ambientis preſſio imminuatur, aut interni aëris elaſticitas vel per calorem, vel per ignem electricum adaugeatur; aut demum ſi congelatione conſtrictis liquorum poris aër condenſetur (*i*). Contra (IX) aër in liquidorum poros irruet, ſi ejus preſſio elaſticitatem incluſi aëris ſuperet, quod fiet translatione in denſiorem aërem, ambientis condenſatione, liquorum refrigeratione, eorumdem congelatorum ſolutione.

(*i*) Aërem in aquae poris contentum per congelationem elaſticitatem recuperare contendit Halesius (l. ul. c. exp. 2, n. 7) & Dbmarest (in notis ad Hauksbeium II, p. 400, 401): elaſticum jam fuiſſe; ſiquidem frigus aëris volumen, & elaſticitatem non auget, ſed minuit: (Muschembroek introd. § 1477) perinde expelli, ut vini ſpiritus, & ſalia aqua ſoluta ab eadem congelaſcente extruduntur, Mairan (l. c. a p. 287 ad 290).

Quum vis refractiva glaciei vi aquae refractiva paullo minor ſit (De la Hire mém. de l'Acad. 1693, p. 252, Mairan l. c. p. 299, 300), atque adeo denſitas minor; mirum eſt aërem, cujus volumen ex glaciali frigore contrahi debuit, ejus tamen poris contineri amplius non poſſe, imo ab iiſdem expelli, niſi aut mutatam figuram pororum, aut extraneum corpus aërem pellens incuſemus, quae tamen hactenus nullis certis argumentis demonſtrata ſunt.

LIII Ex his facile refelluntur, quae adverſus elaſticitatem aëris in liquidis contenti afferuntur. Ajunt enim aërem liquidis contentum elaſticum non eſſe. 1° Quod comprimi non poſſit (*k*). 2° Quod ipſius volumen majus ſit volumine liquorum, a quibus recipitur (*l*). 3° Quod e liquoribus erumpens ipſorum volumen augeat (*m*). 4° Quod non ſtatim e liquidis prodire incipiat, ac aër ambiens rarefieri incipit, ſed ingens rarefactio praecedere debeat, priuſquam erumpat (*n*). Ex his nempe omnibus concludunt aërem in liquidis in minima elementa ita diviſum eſſe, ut elaſticitatem non exerceat (*o*), aut eadem prorſus deſtituatur (*p*). Recuperare vero elaſticitatem, quotieſcumque aut ambientis rarefactione, aut calore, aut igne electrico, aut congelatione in majores bullas fuerit collectus.

LIV Harum, inquam, ſimiliumque objectionum ſolutio ex praecedentibus perſpicua eſt. Nam 1° aër quantumvis compreſſibilis, liquidis, quorum poris continetur, compreſſibilitatem nequit impertiri (II). Falſum vero eſt volumen aëris in liquidis contenti horum volumine majus eſſe, ſi ad ambientis aëris denſitatem redigatur (*q*). Etſi enim MARIOTTE ex aqua aëris volumen ſe eduxiſſe tradat ipſius volumine 8, aut 10 vicibus majus; erroris tamen fontem HALESIUS invenit, qui ex oleo aquae cir-

(*k*) Auctores cit. ad not. *k*.
(*l*) BOERHAAWE ch. I, p. 279, 280, exp. 10, MAIRAN l. c. p. 137, ex MARIOTTE omnes.
(*m*) ELLER. l. c.
(*n*) BOERHAAWE l. c. p. 277 coroll. VI ſubſidente jam mercurio in barometro ad 25 pol. ex aqua nondum prodire. Non prodire, niſi externo aëre ad dimidium rarefacto (id. prael. § CCI ad verbum *elaſticae*) ſubſidente mercurio ad tres, vel quatuor pol. MUSCHEMBROEK (introd. § 1477).
(*o*) BOERHAAWE prael. l. c.
(*p*) Id. l. c. & ch. I, p. 280, 281.
(*q*) Vid. ſupra not. *d*.

cumpoſito in eo experimento magna ex parte aërem illum prodiiſſe adnotavit (*r*). Cur vero liquorum volumen erumpendo adaugeat, ſuperius indicavimus (II), quia nempe dum propria elaſticitate dilatatur, pororum anguſtia impeditur, quominus ea velocitate effugiat, qua nititur expandi (*s*). Ex quo intelligitur cur bullarum ſpecie aër non erumpat, niſi poſtquam ambiens admodum fuerit rarefactum: nam ſi elaſticitas interni aëris externi preſſionem parum ſuperet, per pororum meatus erumpens paullatim aër aequilibrium quiete reſtituet (*t*), tum vero, ut dicebam, ipſius eruptio tumultuaria demum, & violenta erit, & bullas, undaſque excitabit, quum exceſſus elaſticitatis interni aëris ſupra preſſionem externi tantus erit, ut per anguſtias pororum ea velocitate erumpere nequeat, quam elaſticitatis differentia poſtularet.

LV Aër igitur in liquidorum poris diviſus utique in minimas partes eſt, ſed ita ut elaſticitatem exerceat: nam phaenomena ejus aëris proprietatibus elaſtici fluidi apprime conſentanea eſſe oſtendimus (II). Nec obſtat, quod obſervant, in liquorum poris hunc aërem quieſcere: non enim quieſcit ex eo, quod elaſticitate careat, ſed quia niſus ejus elaſticus ab aequali ambientis preſſione co-

(*r*) L. ult. c. exp. 2, n. VI, p. 335, 336. Mariotte experimentum a Boerhaawio narratur ch. I, p. 279, exp. 10.

(*s*) Viſciditate liquorum impeditur, Muschemb. introd. § 2162.

(*t*) Revera, quando vas aquam continens, & obturatum repente in vacuo aperitur, longe copioſiores bullae erumpunt, quam quum aqua in aperto vaſe intra excipulum pneumaticum conſtituta, paullatim vacuum paratur; praeſertim ſi excipulum amplum ſit, ut non niſi tardius exhauriri poſſit. Boyle exp. phyſico-mech. exp. 28, p. 64, 65.

Quod ſi igitur tardiſſime aër educatur, interpoſita mora inter ſingulas exanthlationes, veroſimile eſt aërem e liquoribus latenter & abſque bullis poſſe exhauriri; quemadmodum latenter & abſque bullis in eos irrepſit. Hinc vero concludi poteſt etiam ex translatis liquoribus in rariorem aërem, tum ex aucto per tempeſtatem calore aërem ab ipſis clam prodire, licet ex defectu bullarum contrarium ſtatuat Muschembroekius introd. § 1477.

hibetur. Nec etiam admitti potest, quod addunt, calore, igne electrico, congelatione, partes, quae prius elasticae non erant, elasticitatem recuperare, quamdiu haec tanta non sunt, ut elementa ipsa liquorum transmutare possint. Etsi vero ab harum caussarum vehementia fixae corporum partes in aërem elasticum converti queant; nihil tamen simile ab ambientis aëris exanthlatione licet exspectare, quae nihil aliud praestat nisi, ut aëri e poris liquorum erupturo resistentiam tollat, qui certe, ea tantum sublata, elasticorum corporum more non expanderetur, bullasque efformaret, si illic elasticitate orbatus delitesceret.

LVI Enimvero phaenomena aëris fixi corporum a phaenomenis aëris elastici hactenus expositis longissime absunt. Ut enim 1° aër elasticus, nulla inducta in partes liquorum elementares mutatione, elici potest, & iterum admitti (I, II): contra aër fixus excuti nequit, nisi per putredinem, fermentationem (*u*), efferveſcentiam (*x*), vehementioris ignis vim (*y*) corporum compages destruatur, & elementa ipsorum pervertantur: nec propterea: 2° aër hoc pacto expulsus corpora a quibus educitur, sponte sua iterum subit, unde aëram metamorphosim elementorum corporis in aërem elasticum fieri concluserunt (*z*). 3° Aër hic pluries superat volumen corporum, a quibus educitur (*a*). Hinc nullatenus elastica forma in ipsis praeexstitiste

(*u*) Boyle exp. physico-mech. cont. II, passim.
(*x*) Statique des veget. cap. VI ab exp. 83 ad 104.
(*y*) Ib. ab exp. 49 ad 79.
(*z*) Aërem anthlia e liquorum poris eductum elasticum fuisse, & ad eorum compositionem non pertinere, secus ac illum, qui fixus est, nec nisi chymicis artificiis educitur (Dict. de chym. I, p. 59). Similia Macbride (essais p. 359 in not.) & Halesius, qui hoc addit ad utriusque aëris discrimen ostendendum aërem artefactum citius tardiusve elasticitatem amittere (l. c. append. exp. 2, n. VIII); jacturam vero ponderis, quam tartarus, aliaque corpora per distillationem patiuntur tribuit conversioni eorumdem in aërem elasticum (l. c. p. 241).
(*a*) Boyle, Hales, Macbride l. c.

censendus est : nam densitatem, & propterea elasticitatem tantam habuisset, ut eidem coërcendae nec ambientis pressio, nec corporum firmitas paria esse possent (*b*). 4° Aër ille artificialis plerumque venenatus, flammaeque, & animalibus infensus est, unde aliqui verum aërem esse pernegarunt (*c*), qui tamen aërem liquorum poris contineri concedunt (*d*), forte quod ejus naturam a communis aëris indole haud similiter abludentem observaverint : quae omnia tantam inter priorem illum liquidorum aërem, & hunc arte factum ponunt differentiam, ut vel ipse HALESIUS, qui tantam in aëre fixo corporum explorando, ac illustrando diligentiam adhibuit, aërem vere elasticum liquorum, & inprimis aquae poris contineri affirmet, & dissidentium argumenta refellat (*e*).

LVII Ut vero de ceteris liquoribus diximus, de sanguine etiam dicendum, ipsum aërem continere, qui sublato externo aëre bullarum specie erumpat (*f*), & a sanguine ultra saturationem recipi non possit (*g*). Hic etiam aër dum erumpit sanguinis volumen adauget (*h*), adeo ut arteria, & vena, quae aqua graviores ipsius fundum petunt, facto vacuo, jam tumidiores, levioresque innatent (*i*). Neque quod aërem contineat sanguis ideo compressibilis evadit (*k*).

(*b*) HALES l. c. exp. 25, p. 189.
(*c*) MUSCHEMB. in FLORENT. p. 37, 38.
(*d*) Id. essai de physiq. § 884, 885.
(*e*) L. c. exp. 2, n. VI, VII a p. 335 ad 338.
(*f*) MUSCHEMB. disp. p. 575, introd. § 2165, BERGERUS de nat. hum. p. 43, BOYLEUS, des agueliers, cour. de phys. II, p. 457.
(*g*) BOERHAAVE praelec. ad § CCI ad verbum *absorbi*.
(*h*) Coagulum cruorosum in vacuo intumescit. MUSCHEMBROEK. disp. p. 575.
(*i*) MUSCHEMBROEK. disp. § 14 introduc. § 2165. AUAGIUS effets de l'air § 72, MORGAGNI de sedibus, & causis morb. V, p. 18, p. 41. Viscera, quae aquae funduni petunt in vacuo intumescunt, & innatant. MUSCHEMB. disp. § 5.
(*k*) SAUAGIUS l. c, § 71, & el. phys. § 138.

Demum coagulatione aër ad concrescentis sanguinis superficiem bullarum hexagonarum specie expellitur (*l*).

LVIII De hoc aëre quaestio etiam fit, utrum elasticus, & communi similis, an fixus, & elasticitate destitutus censeri debeat. Illud ex hactenus dictis constare satis videtur aërem in poris sanguinis contentum ab illo, qui in ceterorum liquorum poris continetur nequaquam discrepare (*m*). Hinc est, ut qui aërem ceterorum liquorum inelasticum dicunt, hanc quoque sanguinis elasticitatem denegent (*n*): viciſſim, qui nobiscum liquorum aërem elasticum esse opinantur, elasticum quoque aërem in sanguine nobiscum admittant (*o*). Nec propterea necessarium puto diutius immorari in expendendis difficultatibus, quae adversus elasticitatem aëris in sanguine contenti afferri solent iis prorsus similes, quas § III, IV expendimus; quod nempe, quum sanguis incompressilis sit, ejus aër elasticitate carere debeat, quod quum nonnisi, sublato externo aëre, expandatur, prius inelasticus esse debuerit, quod demum inelasticus sit, quum sanguis frigore parum adeo constringatur. Enim vero aër in poris sanguinis contentus nec ipsum compressibilem, nec fri-

(*l*) Idem el. phys. § 150, Littrius mém. de l'Acad. 1714, p. 331.

(*m*) Idem affirmant Boerhaave (inst. § 210), Hallerus (el. phys. III, p. 337, 339), Savagius (el. phys. § 133, 137, 138), Muschembroekius (introd. § 1481).

(*n*) Boerhaave ch. I, p. 281, alii, quos memorat Bergerus, qui aëris quamdam tenuiorem, *mediae naturae, non elasticam, quam ipsi satis exponere non queunt* portionem sanguini commiscere contendunt. De natur. hum. p. 40.

(*o*) Vulgarem aërem in sanguine contineri Savagius el. phys. § 133, 137, & Muschembroekius, qui ait: „ Aër, qui cum chylo transit in „ sanguinem, ejusdem est naturae, ac aër, qui inspiratur . . . nam elasticum gravem se probat in ductu thoracico (disp. p. 581). Elasticum quoque aërem sanguinis faciunt Ferrein (disp. p. 559), Duverney (posth. II, p. 83, 84), Macbride, qui contrariam Boerhaavii opinionem impugnat (l. c. a p. 66 ad 102), Bergerus (l. c. p. 43), Fantonus (dissert. anat. p. 143), Halesius, qui ab aëre elastico fluida animalium promoveri contendit (l. c. p. 266), & ex primis Borellus (prop. CXII, CXIII).

gore magis denſabilem efficere debet, nec ſuas proprietates ullo modo ſanguini poteſt impertiri. Similiterque aër ſanguinis preſſione atmoſphaerae cohibitus non prius ſe expandet, quam ea preſſio fuerit ſublata. Confer. ſupra §. III.

LIX. Illud utique ex ſanguinis incompreſſibilitate erui poteſt, aërem per ejus poros diſperſum (*p*) neutiquam vero in bullas diſtinctum (*q*). Nam hujuſmodi bullae extra poros ſanguinis poſitae id utique efficerent, utpote compreſſibiles, ut commune ex ipſis, & ex ſanguine conflatum volumen minui poſſet, unde ſanguis compreſſibilis videretur. Quod ſi aëreae bullae in ſanguine non adſunt, inde poteſt intelligi, cur aër in ſanguine contentus non noceat, licet bullae aëreae in ſanguine genitae (*r*), aut in vaſa inje-

(*p*) „ Aërem elaſticum in intimis interſtitiis humorum omnium cum ſanguine circulantium contineri, & quidem ipſum ita diviſum, ut „ non facile aliquot partes invicem collectas poſſideat (Muschemb. „ diſp. p. 592), diſſolutum in aqua, & in ea tamquam ſal aliquis „ colliqueſcentem (Haller l. c. p. 366, 367). Similia Sauagius (el. phyſ. § 144), Morgagni (l. c. V. § 18, p. 41), Borellus (prop. CXIII), Fantonus (l. c. p. 345). Amplam pulmonibus ſuperficiem datam eſſe, ut aër per minimas partes ſanguini facilius admiceretur (Duveeney l. c II, p. 87, 506).

(*q*) Quales bullas admittit Meryus (Mém. de l'Acad. 1707).

(*r*) „ Si vero contingat aliquot partes aëris in ſanguine combinari, morbi „ periculoſi, & mors oboriantur (Muschemb. diſp. 593). Aër ipſe „ ſolutus, ac liber inter ſanguinis partes interjectus harum motui ſe „ opponit (Morgagni l. ul. c.). Morbus liquidorum obſtat, ut videmus liquores in vaſa ſyphone injectos, intercepto aëre, validum „ obiicem, ac fere inſuperabilem invenire (Fanton l. c.): videtur „ aër cor diſtendendo eius motum impedire, ſicque mortem inferre (Morgagni l. c. V. § 23).

Aëris vero bullae in cadaveribus obſervatae vel cum manifeſta putredine (Morgagni V. § 29, 30, XXXI, § 23), vel abſque ulla alicuius momenti adjuncta putredine (Haller in Boerh. n. *i* ad § CCI). Poſt haemorragias (Littre Mém. de l'Acad. 1771 p. 331, Ferrein diſp. p. 519). Poſt vulnera (Haller pr lin. § 280, & ul.). Poſt repentinam mortem cor aëre plenum (Ruyschius epiſt. probl. XVI p. 9.). Ex atrophia venae aëris plenae (Lieutaud préciſ. p. 491). Confer Morgagni l. c. V. § 17, 19, 20, 24, 25.

injectae (*s*), quaeque poris ſanguinis aëre jam ſaturati excipi amplius non poſſunt, utique laedant.

LX An vero aër ſanguinis per pulmonem advenit? an is eſt primarius reſpirationis finis (*t*)? Quantitas aëris, quae ad ſanguinis ſaturationem requiritur, cum chylo videtur advenire: nam chylus ex alimentis, & potulentis fit aëre refertis (*u*). Hinc aërem elaſticum in vacuo emittit, eademque phaenomena praebet, quae a ſanguine exhiberi obſervavimus (*x*). Quare quum ſanguis aëre ſemel ſaturatus nullum (*y*) recipere amplius poſſit (IX), perſpicuum eſt, aërem nullum per pulmonem in ſanguinem advenire, niſi cauſſa aliqua occurrat, quae aequilibrium inter externum aërem, & aërem in ſanguine contentum valeat perturbare. Rem confirmant aquatica animalia (*z*), & foetus ipſi in amnio contenti (*a*), qui humores aëre elaſtico haud mi-

(*s*) De effectibus aëris in venas animalis injecti conſer HELVETIUM (Mém. de l'Acad. 1718 p. 232), MORGAGNUM, qui ab immiſſo aëre ſanguinem negat coagulari, & animalia alia prae aliis ab eodem laedi affirmat (l. c. V. § 21, 22), BERGERUM, qui pedetentim immiſſum aërem (l. c. p. 40); tum PRINGLIUM, qui pauca copia funeſtum non eſſe obſervat, licet pulſum intermittentem reddat (maladies des armées II p. 295).

(*t*) Ut ſentit BORELLUS (l. c. prop. CXIII), LOWERUS (de cord. p. 158), FANTONUS (l. c. p. 342, 343), RUYSCHIUS (epiſt. probl. XVI), DUVERNEY (l. c. p. 83, 84), FERREIN (diſp. p. 559).

(*u*) Ita MUSCHEBROEK (diſp. 580), NEHEDAM (l. c. p. 562), MACBRIDE (l. c. p. 103), SENAC (du coeur II p. 121). Non diſſentit MERYUS aërem, qui ad ſanguinis ſaturationem requiritur, cum chylo advenire (Mém. de l'Acad. 1707 p. 157, 158, 165) SAUAGIUS (effets de l'air § 76).

(*x*) In chylo perinde ac in venis, & ſanguine demonſtrari MORGAGNI (l. c. V. § 21), MUSCH. (diſp. p. 173), ex ductu thoracico, ſcilicet duobus vinculis intercepto, & in vacuo tumente.

(*y*) Ita BOERHAAVE (prael. § CCI ad verbum *abſorti*), HALLERUS (el. phyſ. III p. 337), & ipſe MERYUS (Mém. de l'Acad. l. ul. c.).

(*z*) FLORENTINI (p. 54, 55 col. Acad.). HAUKSBEE (exp. phyſico mech. II p. 429), BOYLE (experimenta phyſico-pneum. tit. VII), DUVERNEY (II p. 503, 504).

(*a*) MUSCH. diſp. p. 570.

nus imbutos habent, licet illa pulmonibus careant, hi vero nullam respirationem exerceant.

LXI Quod si aequilibrium inter externum internumque aërem pervertatur, tunc equidem videtur per pulmonem commodissime posse reparari (*b*). Nam aër vapori pulmonali admixtus eam viam facile penetrat (*c*), & per eumdem majores etiam aëris bullae interdum immittuntur (*d*), & hanc ipsam viam effluvia odorifera, & venena saepissime legunt (*e*), & demum per amplissimam super-

(*b*) Vel ipse Muschembroekius admittit (introd. § 2168), licet in primis scriptis copiose probare conatus esset, viam aëri in sanguinem per pulmonem denegatam esse (disp. cap. III toto).

(*c*) „ Aërem in sanguinem venire, nemo, puto, negat, sed dissolutum in aqua & l. c. (Haller el. phys. III p. 336, 337). Sunt qui negant injectum in trachaeam aërem subire venam pulmonalem, *at si aërem in tenuia intestina intrudant, nil quoque lactea vasa subire notabunt, interea chylus copiose eadem subintrat, quem aëre prorsus destitui nemo affirmaverit*, Fanton l. c. p. 242, 243. Ita plerique auctores cit. superius ad not. *y*.

(*d*) Etsi experimentum non successit Harveo (in proem. ad exerc. I de mot. cord. p. 21): nec Nehedamio (l. c. p. 565): nec Bohnio (circ. anat. p. 69): nec Bulfingero (com. act. Petr. III p. 240): nec Halesio (haemastat. exp. XI n. VI): nec Muschembroekio (disp. p. 610): nec Duverneyo (l. c. II p. 82, 83), qui absque adhibita vi id fieri non posse suspicantur. Successit tamen Swamerdamio (de resp. sect. 3 cap. 2, § 4) testibus experimenti Sylvio (disp. VII, § 86), Stenonio (epist. ad Bartholi. IV ep. 55), Borrichio, qui nil unquam disruptum apparuisse affirmat (l. c. ep. 76). Successit etiam Meryo (Mém. de l'Acad. 1707 p. 164), Ferreinio (disp. p. 549), Lieutaudio (el. physic. p. 89), & Hallero, qui aërem *lenti vi, sed continuata* transmitti ex proprio experimento docet (in Boerh. n. i ad § CCI), & Morgagno, *qui, inflato pulmone, repetitis praesertim, & diutius in eam productis, nec tamen violentis inspirationibus pulmonalis venae truncum vidit spumoso humore scompleri* (l. c. V. § 22); ex quibus erui posse videtur, etsi aëris bullae secundum naturam in sanguinem per pulmones non adveniant, quum nullae revera in eodem insint (IX); patulas tamen vias esse, per quas non difficile possint impelli.

(*e*) Odor spiritus therebinthinae, qui observante Hombergio urinas inficit apud Mery (Mém. de l'Acad. 1707 p. 166, 167), & miasmata contagiosa in sanguinem transmissa (Bernoulli disp. p. 614), Sauagius (l. c. § 140), Duverney (l. c. p. 87), Lieutaud (el. phys. p. 90).

ficiem in pulmone nudus fere sanguis aërem contingit (*f*). Idque eo magis verosimile, quod cutis, quae altera via visa est emittendo, admittendoque aëri apta (*g*), longe tamen durior pulmone, densiorque sit, & minoribus exhalantibus vasis instructa; hinc animalia in vacuo inflata perstant, nec detumescunt (observante Meryo), nisi aërem per os emittant (*h*).

LXII Si itaque aër externus interno rarior fiat, internus vi sua elastica se expandens animalia inflabit, eademque symptomata inferet, quae ab immisso in venas aëre producuntur (IX); quae tamen omnia aëre ipso mox per pulmones prodeunte, & ad aequilibrium se componente evanescent (*i*). Imo vero si illa externi aëris rarescentia paullatim oboriatur, ut sensim aër per pulmones erumpere possit (IV), sensim etiam aequilibrium reparabitur, quin ulla animalium inflatio, ullumve incommodum nascatur (*k*). Contra si aër externus densior fiat, pressione sua in pulmonalem sanguinem penetrabit donec per omnes corporis humores aequabilem densitatem fuerit adeptus.

LXIII Parum dissimili ratione contingit, ut si vacuum aliquod in humano corpore nascatur, in illud aër per exhalantia vasa se diffundat, quo spectat aër in luxati artus cavum collectus, & ejus reductioni resistens (*l*), aut

(*f*) Haller pr. lin. § 278. Se non videre *quid obstet aëri, quominus venas adeo magnas subeat*, id in Boerh. not. *l* ad § CCI.

(*g*) Poros cutaneos aërem admittere, & emittere, quum pulmones ei muneri non sufficiant, Ruyschius epist. prob. XVI p. 9. In omnes corporis cavitates viam aëri per cutem patere, Keil. (tent. p. 193), Bouillet hist. de l'Acad. 1743 p. 80.

(*h*) Mém. de l'Acad. 1797 p. 221.

(*i*) Misc. Taur. II, p. 176 § 13.

(*k*) Incommoda in Academicis altissimos Peruvianos montes conscendentibus ex labore itineris: nam quando equo vecti conscendebant, eadem vitabant, observante Sauagio (effets de l'air 68).

(*l*) Haller el. phys. III, p. 329, not. *u*, *x*, *x*4, *y*.

vicissim si in cava corporis effusus aër comprimatur, & addensetur, per resorbentia vasa paullatim penetret, & in humorum massam se diffundat. Atque huc referri potest aër per pectoris vulnera, aut paracentesim admissus, & per occlusionem pectoris relictus, qui licet principio dyspnoeam inferat, cito tamen incommodus esse desinit (*m*), huc quoque emphysematum resolutio spectare videtur (*n*), quae phaenomena aëris resorptioni potius, quum destructo ipsius elateri adscribenda esse vel ex eo constat, quod HALESIUS observaverit aërem numquam ex toto elasticitatem amittere (*o*).

LXIV An vero praeterea admittenda est circulatio quaedam aëris, & renovatio, ut in pulmone receptus aër per cutem exhalet (*p*), aut absoluto circulo per pulmonem ipsum iterum expellatur (*q*)? An inde deducenda diversitas coloris arteriosum inter sanguinem, & venosum? Equidem omnes humores excrementitii aëre ad saturationem referti sunt (*r*), sed sanguinis massa reparatur a novo chylo, novo aëre saturato (X); nec propterea

(*m*) HALES l. c. p. 213, 214, HALLER l. c. p. 240 241.

(*n*) „ In emphysemate siquidem flatus dispellitur, necesse est, ut vel cutem „ inveniat perviam, quam dicunt aëri non esse permeabilem, vel „ resorbeatur in canales nostros (HALLER n. *m* ad § CCI BOERHAAV.).

(*o*) Statique des végét. p. 263, 264, 265. Vid. Miscel. II, p. 185, § 25.

(*p*) Quae vetus sententia MERY est. Hist. Acad. reg. l. 4, sect. 2, cap. 3, n. 12, 13, non repugnate SAUAGIO l. c. § 135.

(*q*) Quae nova sententia MERY Mém. de l'Acad 1700, 1707.

(*r*) Per omnia organa exteriora aërem prodire, & etiam humores per cutem erumpentes, implicitas habere aëris particulas, indeque esse, ut animalibus in intercluso aëre mortuis, mercurii altitudo in barometro iterum augeatur. FANTONUS l. c. 344, 345. Aërem superfluum per vias urinae, & perspirationis ejici. MACBRIDE l. c. p. 104.

ulla neceſſitas aëris per pulmonem admittendi (*s*) ut jactura reparetur, quae per excretiones contingit. Quod vero ſpectat ad colorem ſanguinis arterioſi, venoſique, ſi diſcrimen ſatis certum, & conſtans eſt, non inveroſimile videtur ab evaporatione ſanguinis, quae in pulmone fit, eſſe deducendum. Etſi enim alibi experimenta protuli ſuadentia colorem ſanguinis ab aëre mutari (*t*), etſi eorum veritatem deinceps conſtanti ſucceſſu comprobatam vidi; quum tamen animadverterem conditiones, propter quas aër admittitur, aut arcetur, evaporationi etiam aut favere, non obſtare, in eam opinionem deductus ſum, ut aut tam praeſentiae aut contactui aëris, quam evaporationi eos effectus tribuendos ſuſpicarer; quae tamen hypotheſis non prius poteſt admitti, quam experimentis explorata fuerit, ac comprobata.

LXV. Aër vero ſanguini admixtus quid boni praeſtat? An ad ſanguinis fluiditatem ſervandam conducit (*u*)? An inde fit, ut cum aëre quaſſatus ſanguis numquam concreſcat (*x*)? Verumtamen fluiditas ſanguinis per agitationem producta a ſero eſt, quod nunquam concreſcit, rubris glo-

(*s*) Hoc ipſum ratiocinium proponit ipſe MERTUS, quando quaeſtio tantum fit de aëre, qui ad ſanguinis ſaturationem requiritur (Mém de l'Ac. 1707, p. 157, 158, 165): nam eius hypotheſis de circulatione ea is verſatur circa aërem adunatum, *aër in maſſe*, quem ſanguini ultra ſaturationem ineſſe, & in pulmone renovare cenſet (ib. p. 162, 164, 165).

(*t*) Miſc. Taur. I, p. 68, & ſeq.

(*u*) THRUSTON (l. c. p. 62, 63). Quatenus ſanguini ſuppeditat tenuius elementum. MALPIGHI (l. c. p. 18). Eamdem ſententiam ſequuntur plures alii, quos memorat Cl. HALLERUS (el. phyſic. III, p. 331, 332); negat tamen BORELLUS (prop. CXIV.

(*x*) Sanguis quaſſatus nec coire amplius poteſt, nec inſulam facere (De HAEN noſoc. pract. part. IV, cap. VI, § 3). Similia MUSCHEMBROEKIUS (diſp. p. 554). AURIVILLIUS (diſp. 275, not. *m*). DAOUSTENE (diſp. p. 547). *Sanguis emiſſus, vaſis ſuis in liberrimo aëre, etiam conquaſſatus cum aëre elaſtico, protinus* obſervatur coagulari BOERHAAVE (prael. § CCI ad verbum *oſcillatione*).

bulis infecto, quum pars gelatinosa, quae alias rubros globulos secum in placentam abripit, agitatione in serum dimittat, & sola concrescens membranam Ruyschianam dictam efformet (*y*). Quamvis igitur serum cruore tinctum falsam cruoris non concrescentis speciem referat, certum tamen est agitatum cum aëre sanguinem coagulari. Vicissim sanguis animalium in vacuo exstinctorum aëre licet spoliatus, fluidus reperitur (*z*). Demum in calore animalis servatus sanguis; quamvis quiescat; diutissime fluidus perstat (*a*), ex quo conficitur fluiditatem sanguinis non ab agitatione, nec ab admixto aëre, sed a calore esse repetendam?

LXVI. Aër etiam sanguini admixtus parum nihilve ad sanguinis oscillationem, motumque intestinum videtur conferre (*b*), saltem quamdiu cum externo aëre aequilibratus in ejusdem meatibus quiescit. Enim vero superius constitit in poris liquorum incompressibilium contentum aërem comprimi non posse; cum amplitudo aut figura pororum nequeat mutari (II, IV). Aër vero non compressus nec etiam resiliet, nullumque propterea motum sanguinis partibus imprimere poterit.

LXVII. Quam nam igitur demum utilitatem aër sanguinis affert? Praecipuam eam esse censeo, ut aequilibrium cum externo aëre constituat, sicque impediat quominus vasa ab ejus pressione elidantur (*c*). Praeterea rori exha-

(*y*) Cl. Gaber. Miscel. Taur. III, § 13, 14.
(*z*) Borelli prop. CXX.
(*a*) Schwenche hematol. p. 90. Senac du coeur II, p. 124. In calore humani corporis sanguis per dimidiam horam nullam mutationem subibat. Eller Acad. de Berlin 1751 col. Cl. Paul. II, p. 390.
(*b*) Uti censet Malpighius (l. c. p. 18). Duverney II, p. 478, & 507, 509, & alii multi.
(*c*) Similiter Bergerus (l. c. p. 41). Sauagius (l. c. § 74). Muschem. (introd. § 2170). Senac (l. c. II, p. 118). Macbride (l. c. p. 95, & seq.). „ Et sane nisi res sic se haberet, huius, in quo nostra sunt „ corpora, aëris circumundique prementis vis urgendo vasa motum „ sanguinis sufflaminaret. Morgagni l. c. V. § 18.

lanti admistus videtur efficere, ut viscera ac membranae supra se invicem moveri possint: perinde ac si, ulla externa pressione opprimerentur (*d*); atque huc incommoda refero, quae ab aucta subito externi aëris pressione nascuntur, non prius cessatura, quam aër humorum uniformem densitatem acquisiverit (*e*), unde animal non solum aptus fit atmosphaerae ponderi ferendo, sed ejus etiam decuplum facile sustinet (*f*). Inde etiam intelligitur cur animalia in rariorem aërem repente translata, inflentur, convellanturque; quae tamen symptomata aut nulla sint, si ea mutatio paullatim fiat, aut etiam paullo post sedentur, quum aër humorum aeque rarus evaserit (XII).

LXVIII Aër itaque humorum animalium quamdiu ejusdem cum externo densitatis est, cum eodem in aequilibrio est, ut humores per sua vasa aeque libere moveantur, ac moverentur in vacuo spatio; similiterque membranae, & viscera supra se invicem facile gliscunt: at si minoris extus densitatis repente evadit vasa intumescunt, membranae secedunt, & divelluntur, si majoris exprimuntur vasa, interiores partes ad se mutuo apprimuntur.

LXIX Ex quibus experimentum Halesii explicatur, qui nempe deprehendit animalis in vacuo erecti pulmones, qui albi reperiri solent, rubros adparere, si animalis ipsius thorax variis incisionibus apertum fuerit priusquam vacuo committeretur; tum experimentum alterum, in quo feris tranversim sub diaphragmate sectae diaphragma

(*d*) Partes maxime flexiles, ut abdomen, ventriculus resistunt ponderi atmosphaerae ob inclusum aërem (Sauabius l. c. §41). Sine aëre interno elastico cava corporis elideremur (Senac l. ul. c. Keil l. c. p. 192).

(*e*) Qualia incommoda gravissima ex nimis celeri campanae urinatoriae descensu oriuntur. Desaguliers cours de physique II, p. 459. Sauabius l. c. a §43 ad 46, Muscn. introd. § 2170.

(*f*) Desaguliers l. c.

in vacuo deprimi obſervavit (*g*). Patet nimirum aërem rore thoracico contentum in vacuo ſe expandere debere pulmonem inter, & diaphragma, eademque ab invicem divellere, non ſecus ac ſcleroticae laminae ab aëre humoribus contento in vacuo divelluntur (*h*), aut marmorea plana ſibi adhaerentia in vacuo ſeparantur ab elatere aëris oleo inhaerentis, quo inunguntur (*i*). Itaque expandens ſe aër pulmones ita comprimet, ſanguinemque ita ab iiſdem exprimet, ut, mortuo animali, exſangues, albique appareant; quod non continget, ſi aperto prius pectore aër ille libere exhauriri poſſit. Eadem vero cauſſa, quae pulmones comprimit, diaphragma etiam in oppoſitam partem detrudit.

LXX Enimvero haud veroſimile videtur, diaphragma depelli ab aëre in pulmone reſtitante, ac ſe expandente, quum aër ille libere per glottidem prodire poſſit, hinc pulmo in vacuo non intumeſcat, aut diſtrahatur, ſed contra denſior fiat (*k*), unde potius locum cedere diaphragmati deberet, ut altius in pectus aſſurgeret. Quemadmodum igitur in ſanguine ſecundum naturam nullae inſunt aëris bullae (IX), ita nec in cavo pectoris (*l*), & quemadmodum ex ſanguine bullae erumpunt, ſi in vacuo ſpatio conſtituatur (VII); ſic etiam videntur ex vapore perſpirante pectoris poſſe prodire, & memorata phaenomena.

(*g*) Haemast. exp. XII, n. 10.
(*h*) Muschembroek diſput. p. 587.
(*i*) Boyle experim. phyſico-mech. cont. I, exp. 50, I, p. 303, Purchotius inſtit. Philoſ. II, p. 329.
(*k*) Ut aquae fundum petat, modo animalia in vacuo lente enecentur, aut aliquamdiu poſt mortem in vacuo relinquantur (Verati com. Bon. T. II, P. I, p. 338, 339), & aër paullatim admittatur (Muschembroek. introd. §2167.
(*l*) Experimento a viris Cl. Lieberkunio, & Hallero inſtituto, V. Haller de reſpir. part. II, § 39, part. III, § 16.

mena producere. Proinde verosimile est ab aperto in vacuo pectoris cavo aërem erupturum non secus ac ab arteria, aut vena in eodem vacuo pertusa cernitur prodire.

LXXI Quamquam vero aërem internum cum externo aëre ad aequilibrium componi in pulmone inprimis existimem (XI, XII), ejusque aequilibrii servati aut restituti maximam esse utilitatem (XVII), haud tamen censeo hunc fuisse praecipuum pulmonis finem. Nam primo rarissime aut numquam natura tantam producit in pondere atmosphaerae mutationem, quae ipsius aequilibrium cum interno aëre insigniter valeat perturbare; dein etsi lentius, reparari tamen per alimenta id aequilibrium potuisset (X), & pulmo qualis in frigidis, aut insectorum tracheae ei promtius restituendo sufficiissent: imo vero in piscibus, qui mutationi externae pressionis maxime sunt obnoxii, alia proculdubio ratione restituitur. Quare cum pulmo humano similis nonnisi calidis animalibus datus fuerit, concludendum videtur exhalationem, & inde consequens refrigerium, quibus calida animalia maxime egent, primarium esse respirationis usum. Vid. cap. praec.

JOANNIS PETRI MARIAE

D A N A

De Solano melanocerasso H. R. Taur.

Quamquam Celeberr. LINNAEUS in eximio opere, quo PLANTARUM SPECIES complecti nititur, Solanum Guineense bis nominaverit, & ante ipsum Cl. DILLENIUS, ac BOERHAAVIUS plantam, de qua hic agitur, cognoverint; omnes tamen ipsius descriptionem paucis complexi de viribus, & proprietatibus ejusdem nullam omnino mentionem fecerunt; nec alium Auctorem invenire datum est, qui ipsius usus memoriae mandaverit. Non inutile propterea duxi, paucis additis ad descriptionem pertinentibus, in ejusdem proprietates, & usus minime vulgares inquirere, ut demum intelligatur quomodo hucusque aut neglecta, aut suspecta planta suas late pandat utilitates.

Quod in Guinea sponte nascatur BOERHAAVIUS (*Ind. alt. part. II. p. LXVIII n.° XVIII*) appellavit *Solanum Guineense fructu magno instar Cerasi nigerrimo umbellato*, eodemque nomine DILLENIUS vocavit (*Eltham. p.* 336) & iconem dedit (*Tab. CCLXXIV fig.* 354) Botanicus svecus supra laudatus simplici *guineensis* Solani nomine (1) plantae speciem intellexit a nostra modo dicta, sive a DILLENII, & BOERHAVII planta omnino diversam, perennem, foliis laurinis. Hanc pro varietate sui *Solani nigri* posuit, quam *guineensem* vocat, & sic nomine tenus ab aliis varietatibus distinguit in *Spec. plant.* (*pag.* 266). Hinc in *Systematis naturae edit.* 12 *reformata* nullum aliud peculiare nomen *triviale* ipsi dedit. Quoniam vero per quindecim, & ultra annos in nostro Horto

botanico excultum inermes spinas, quibus specie satis distinguitur, nunquam dimisit; sed constanter ab omnibus Solani speciebus tum acinorum succo purpuro-colorato, tum statura, aliisque notis diversissimum se se ostendisse vidi; ideo pro distincta plane specie haberi, & nominari posse nullus dubito. Proptereaque triviali nomine melanocerasi optime distingui puto cum Cl. Viro Carolo Allionio Bot. Prof., quod nempe apte nomen hoc exprimat fructuum, seu baccarum hujus Solani similitudinem, quae cum nigris cerasi fructibus intercedit: quemadmodum idipsum immortalis Boerhaavii, & oculatissimi Dillenii descriptiva nomina significare voluerunt. Sub nomine *Solani surinamensis* olim in Horto R. Taurinensi excultam ostendebat primus Praeceptor meus Vitalianus Donati, an quod hoc nomine ad ipsum semina missa fuerint? vel quod Surinamum pro patria revera quoque agnoscat? nescio. Praeter hos, eosque, qui notiones inde hauserunt, vix alium invenies, qui de eodem scripserit.

Planta est glabra, bicubitalis fere, caule angulosо, ramosо, spinis ad angulos & ramos non pungentibus seu inermibus. Folia *Sol. officinalis*, seu *nigri* L. ampliora, angulata, lanceolata, obtusa, alterna. Flores parvi ex basi virescente exalbidi, ad limbum leviter purpuro-violacei, antheris fuscis. Baccae sphaericae, cerasiformes, immaturae virides, per maturitatem atrae, magnitudine nucis avellanae, vel fructus cerasi mediocris, lucentes, in racemos subumbellatos dispositae, nitidae, viridi pulpa, & parvis, multis albidis, compressis orbiculatis seminibus faetae, succo purpuro-violaceum colorem ex se praebente praeditae. Succus odoris potius vinosi est, quam graveolentis, & narcotici,

(1) *Spec. pl. ed. 2 pag. 363; & syst. nat. ed. 12 refor. pag. 173.*
(2) Miscel. Taur. vol. V in auctar. ad H. R. Taur.. Eodemque referente, ab omni tempore in Horto jam exculta fuerat ha c species.

uti a reliquis plantae partibus exhalat, per fermentationem praeſertim vinoſum odorem emittit.

Tota planta contuſa, & retortae indita pondere librarum trium unciarum decem & drachmae unius, atque ſummo ignis gradu calcinata caput mortuum reliquit in fundo retortae pondere unciae unius drachmarum quinque & granorum triginta, coloris atri, ſaporis ſubſalſi; quod intra fornacem calcinatum in crucibulo mediam ſui ponderis partem fere adhuc amiſit, & cinerem reliquit albido-rubentem, ex quo per lixiviationem eductum eſt ſal alkali fixum pondere drachmarum trium, & granorum duorum. Si a combuſtis Solani coloratis acinis obtenta cinereo-ſalina materies, vel ſal inde elixiviatum ſimul in vitrum abire cogatur cum ſilice, vel alia excolore vitreſcibili ſubſtantia, vitro ipſi colorem purpureum communicare ſuis experimentis detexit ingenio non minus, quam ſanguine clarus D. Comes Morozzi (2), qui, ut in non paucis aliis plantarum cineribus, ita in hoc principia colorantia, fixa veluti, in igne manere expertus contendit, colorem ſuum, dum in vitrum tranſeunt, rurſus oſtenſura. Baccae, earumrumque ſuccus ſimilia fere per analyſim praebent principia chymica ac tota planta, licet ſalis fixi paulo minorem quantitatem largiantur, & aliqua in odore primae per deſtillationem prodeuntis aquae differentia intercedat.

Experimenta in maturo fructu, aut ejus ſucco recenter expreſſo plerumque tentata intelliguntur, niſi contrarium aſſeratur. Fructus obtinui ex planta tum in Horto Taurinenſi Regio Botanico exculta, tum etiam ex aliis locis collinis, aut ſubmontanis, vel campeſtribus ſatis agri Pedemontani, in quibus omnibus ſub dio maturum fructum praebuit, & ſua, utut annua radice hyemalis frigoris rigorem aliquando

(2) Examen phyſico-chimique ſur la couleur des fleurs, & de quelques autres ſubſtances végétales. *Miſcel. Soc. Reg. Taur. vol. V. tab. 2.*

rolleravit quando ſerius ſata intra annum flores non dederat. Difficile propterea non erit magnam ipſius quantitatem, & ad opus quodcumque pro lubitu neceſſariam quotannis ſatione obtinere.

Cum ſyrupo ſucci expreſſi ab ejuſdem Solani acinis maturitati proximis nonnulla experimenta inſtitui ad aquarum quarumdam mineralium examen praeſertim commoda, & neceſſaria; quae nimirum ſimiles produnt ſignificationes, quales fere a ſyrupo florum violarum obſervari ſolent. Item cum noſtro ſyrupo, & cum ſimili ſucceſſu aliqua tentavi ex multis illis experimentis, quorum ſeriem olim (3) proſecutus eſt Illuſtriſſimus Comes De Saluce, in quo acquiſitae pro multiplici ſcientia laudes, & honores generis antiquitati pares, & indito ſcientiarum, ac artium amori debiti ſimul refulgent.

Colorum varietas, & pulchritudo, qui ex hac planta obtinentur, & extrahuntur primam hucuſque ſibi conſiderationem merentur ob uſus, quos in pictoria non minus, quam tinctoria arte pollicentur. Et ſane ſuccus a maturis, vel ſubmaturis & coloratis baccis expreſſus purpuro-violacei coloris pulcherrimi eſt, & ad uſus pictorios ſupra chartam opportune adhibitus per ſe optime cedit, ſuumque colorem cum pauco etiam alumine & gummi diutiſſime ſuſtinet. Idem ſuccus brevi ad ſiccitatem Mariae Balneo, aut aliter, antequam corruptionis notas ſibi relictus praebeat, evaporatus extractum largitur, quod ſimilem colorem ſervat, &, ubi opus, prodit cum pauca aqua dilutum. Neque mutationes facile ſentit hic color, quas tractu temporis hujuſmodi picturae ſponte pleraeque ſubeunt: ſaltem ſupra chartam a decem, & ultra annis pictae plantae, quae hunc colorem receperunt, hucuſque immutatae ſervantur; dum non pauci alii plantarum colorati ſucci his, quas ſola dies affert, mutationibus facile deturpantur. Quo-

(3) In Miſcellan. Taur. Vol. III p. 153.

niam vero vividiorem, & magis purpurascentem colorem hujus Solani baccae recentes praebent, quam ad corruptionem tendentes, non incongruum erit adnotare easdem per totum fere annum in aëre aperto servari posse, licet tandem flaccidae fiant, aut siccescant in aëre nimis sicco. Servandi modus multiplex est: sic vel cum ramorum, quibus valde adhaerent, summitatibus in loco frigidiusculo suspenduntur; vel in liquore oleoso, aut appropriato alio, ex. ca. spiritu vini, aut aqua aluminosa immersae detinentur loco frigido, ut tumentes, & satis ad usum accommodatae baccae serventur: ob densam nimirum cutem, qua teguntur, sic propriam diu, quam etiam habent maturae, duritiem servant. Optimam aliam solanacei hujus coloris servandi methodum eam esse probabis, quae communis fere succo Solani est cum aliis coloratis quibusdam liquoribus, qui sibi relicti sub forma fluida mutarentur, uti est color carthami tinctorii &c.: sumuntur nempe stamina cannabis carptae, mundatae, & ad optima fila ducenda paratae; macerantur aliquantisper in aqua; dein probe lota, & exsiccata in purum, vel praeparatum plantae succum immerguntur; mox brevi exsiccata sine expressione, in aëre aperto, & calido, loco clauso, tuto, ac sicco servantur ad usum. Tincturam, qua onusta fuerit cannabis, filaque ejus, simplici immersione deinde, quolibet dato tempore, immutatam facile restituent aquae, ex qua fere decolor eximi poterit; & color aquae communicatus ad setam, ubi opus, tingendam, aliosque usus pictorios traduci poterit. Chartae emporeticae ad similes etiam usus succo imbutae inserviunt, aliaque.

Dixi spiritu vini quoque rubram tincturam elici ex baccis integris, earumve cortice. Haec tamen tinctura longe intensior, & plane purpurea ex iisdem disruptis obtinetur, quae non, quemadmodum succus, fermentationi vinosae; & mox putrefactioni subjacet, sed sub hac forma colo-

rantes particulas poteſt diutius conſervare. Pars igitur principiorum colorantium reſinoſam indolem praeſefert, quamvis ſuccus ipſe in concreto naturaliter exiſtens totus in aqua pura ſolvi poſſit. Idipſum confirmatur experimentis, quibus conſtat purum ſuccum abſque aluminis ſubſidio ſuum ſetae colorem vividum probe communicare; quod coloribus ſimpliciter gummoſo-extractivis vix convenit, ſaltem his minus proprium cenſetur teſte Clariſſimo MACQUERO. (4) Sperandum propterea videtur ob eam cauſam, quod reſinoſo etiam principio vis inhaereat tinctoria, perfectiores, & ſolidiores adhuc has, aliaſque reddi poſſe tincturas ex continuata horum, aliorumque cum hoc Solano inſtituendorum experimentorum ſerie.

Non omnia nunc recenſebo experimenta a me facta ſupra Solani hujus melanoceraſi plantam, & praeſertim ſupra ſuccum baccarum ejus recentem, vel ad extracti formam per evaporationem redactum, ut ipſius indolem detegerem. Aliqua tantum attingam, quoniam naturam, & proprietates reſpiciunt ſtirpis, a nemine, quod ſciam, ante hanc diem accurate perpenſas. Sic recenter expreſſus purpureus Solani melanoceraſi ſuccus ab aceti ſpiritu, & ab ipſo aceto plus minuſve purpuro-griſeum colorem induit; a ſucco limonum dilute & pallide rubentem; a ſtillatitiis ſpiritibus acidis ſalis marini, & nitri in aqua dilutis plus minus intenſe rubrum, coccineumque; ab oleo vitrioli ſimiliter ſoluto vividiſſimum cinnabarinum, qui ſibi diutius relictus in luteſcentem vergit; & demum flocculos in fluido innatantes ſenſim prodit. Cum aluminis ſolutione idem ſuccus dat laete caeruleum colorem variae intenſitatis pro varia utriuſque ad diluentem aquam proportione, qui memoratis picturis commode inſervit. Vitriolum martis obſcure caeruleum, at mutabilem

(4) Paſſim in ſuo dictionario chymico anonymo; & in egregio opere l'art. de la teinture en soye.

reddit. Alkalini ſales, calx, & aqua calcis ad viridem diverſimode diſponunt, ac immutant. Attamen, ſi ad telas pingendas adhibeatur, praeſtat, experientia teſte, cum calce miſcere, quam cum ſalibus, quorum actione fortaſſe nimia, lintea debiliora reddi poſſent, & ſucci pars in flocculos per liquidum diſperſos cogi: ſic viridis optimus color vili praetio habebitur.

Quod ſi matureſcentes eaedem baccae contuſae, fermentationem vinoſam paſſae putrefactionem ſponte ſuccedentem ſuſtineant, & expreſſus inde foetens (6) liquor lente ad ignem evaporet, obſcurum extractum habebitur, cujus colorem *umbraticum* appellare poſſemus, ob ſuam ad corporum umbras praeſertim ſupra chartam pingendas utilitatem. Hic color prae caeteris optimus eſt ad ſicceſcentes plantarum partes, praecipue ad earumdem caules, & non paucas radices perfecte imitandas, quin mutationibus facile ſubjiciantur picturae exinde elaboratae.

Verum.

(6) Hunc foetorem tandem poſt ſex, & ultra menſes ſervatus, & ad ſolem expoſitus in vitrea ampla phiala obturaculo chartaceo tecta, fere amiſit, & in liquamen abiit, quod decantatum conſpiciendam in vaſis fundo reliquit materiam grumoſe concretam, nec cryſtallizatam, in aqua fontis nullatenus, & ex parte tantum in ſpiritu vini ſolubilem, aqua ſpecifice leviorem, indeque ſupernatantem, terrae fullonicae, ſaponi, vel ſinectidi exteriori facie ſimilem, at peculiaris naturae ſubinſipidam, nauſeam moventem, parumper ingrate odoratam, exalbeſcente pallido colore praeditam. Haec inflammata oleum nigrum extus emiſit, quod laetam, nec ſcintillantem flammam diu aluit ſine ingrato odore: pauci poſt combuſtionem relicti cineres cum oleo vitrioli efferbuerunt alkalinae ſuae naturae indicio; an calcareae, vel ſalinae? hucuſque non ſum expertus. Ex dictis interim fere patet concretionem hanc novum eſſe alkalino-oleoſum, & ſingulare artis productum, cujus naturam, & uſus hactenus omnino ignoramus, licet quaſdam saponis, alias reſinae proprietates ipſum oſtenderit.

Verum de virtutibus (7) medicis, quas hucusque non sum expertus, nihil addens jam alias ad setam tingendam a me probatas exponam (8). Quod, ut brevi fiat, aliqua tantum ex multis experimentis eligam, quae inter privatos parietes primum feci ann. 1769, 1770: tum deinde repetii, & sum prosecutus ann. 1771, 1772 in Regio Tincturae laboratorio, ut speciali in hanc rem jussui AUGUSTISSIMI, ET INVICTISSIMI REGIS parerem, CUI colorum hoc Solano obtentorum specimina quaedam non displicuerunt; QUIQUE ideo Perillustrem D. COMITEM D'AGLIÈ ab ALLADIO ad Tinctoriae, aliarumque artium culturam promovendam speciatim, & ex hereditaria veluti propensione addictum publicae utilitatis causa experimentis repetendis praeesse voluit. Theoriam horum, aliorumque experimentorum alio fortasse tempore una cum aliis adhuc instituendis prodam.

I.

Sapone Massilienssi venali dealbata seta, mox indita *simplici tepentique baccarum Solani melanocerasi succo* colorem induit ex purpureo ad violaceum tendentem, vulgo nobis dictum *d'Isabella chiaro*, qui repetitis lotionibus, & immersionibus non magis evanuit, nec aliae mutationi subje-

(7) Si ex indole plerarumque congenerum, & praesertim ex affinitate cum Solano vulgari nigro officinarum de Solani melanocerasi, viribus medicis aliquid per analogiam conjectare liceret, & odor, sapor, analysis consulerentur, pro usu interno infidas, & de veneno suspectas protinus fore hucusque suspicarer: pro externo autem usu fortasse non spernendas resolventes, discutientes anodynas inesse in foliis, caulibus, & floribus: atque lenientes, detergentesque adversus carcinomata insanabilia in fructuum succo recenti, & depurato reperiri posse non obstupescerem.

(8) Ex antecedentium consideratione ad applicationem principiorum colorantium supra setam deveniri posse putavi. Nec spem fefellit eventus, uti etiam ipso tinctorum lato super hanc tincturam judicio jam satis constat.

ctus fuit, quam ſoleat longo labore, & longe majori temporis, ac auri diſpendio paratus color Lichenis Rocellae L. Italis *oricello*, aliique diverſi generis, ex. gr. Carthami, Luteolae &c. Intenſior ad violaceum uſque fiet ſetae color, ſi poſt repetitam in idem tepens balneum immerſionem ipſa exſiccari ſinatur, quem vocant *lilla violante.*

I I

Baccae integrae *cum ſucco earumdem expreſſo coctae*, & deinde expreſſae balneum praebuere, in quod *ad ebullitionem uſque calefactum* demerſa ſimilis ſeta colorem vividiſſimum poſt opportunas lotiones acquiſivit griſeo-ſubpurpurascentem, quem tinctores apud nos vocant *gris de prince*. Hic variae intenſitatis fuit pro varia liquoris tingentis ad ſetam, vel additam aquam proportione, & pro vario tempore ebullitionis. Hos colores a nulla alia planta adeo facile obtineri norunt tinctores.

I I I

Sic jam tinctis ſetis (n. I, II), vel ipſi balneo addita levis quantitas ſucci limonum colorem dat pallide ſubpurpureum, ut in vulgaris Colchici floribus ineſt, qui nobis audit *color di frejdolina chiaro.* Vividus utique per ſe hic etiam eſt, at ex laeviſſima Carthami florum tinctura ad roſeum dilutiſſimum mox accedet.

I V

Eadem (n. I, II) tincta ſeta intenſiorem florum Colchici colorem adipiſcetur ex levi acidi vitriolici in multo liquido diluti, & probe mixti additione. At rigiditas inde aliqua ſetae infertur, unde fortaſſe ſuſpectus eſſe poſſet hujus tincturae uſus.

V

Succus a Solano expreſſus, & ſpiritui vini vulgari junctus, ſive *tinctura ſpirituoſa ex baccis* dealbatae, & ſiccatae ſetae colorem dabit *purpuro-rubentem*, veluti vinoſum; qui minus intenſus erit, ſi ante immerſionem ſeta non fuerit probe ſiccata. Si huic balneo ſucci limonum parva quantitas addatur, ſeta immerſa colorem acquiret leviſſime purpureum. Sed in hiſce tribus caſibus ſetae color peculiariter *lucens*, & *nitidior* erit, quod a ſpiritu vini fortaſſe provenit colorantia reſinoſa elementa intimius penetrante, ſolvente, & intra ſetam inducente. Etenim inſuper iidem quoque colores difficilius (6) mutabiles in ipſa ſeta obſervantur.

VI

Ex variorum alkalinorum additione mutationes tales balneo communicatae ſunt, ut minus facile applicandos, & minus optabiles colores ſeta deinde immerſa obtinuerit.

VII

Exceptione tamen omnino digna ſunt bina producta alkalinae indolis, quae a Spartio ſcopario Lin. eduxit Perillustris Comes Morozzi, mihique obtulit experiunda; ſcilicet *ſal alkali fixum* ex combuſta Spartii ſcoparii planta eductum per cineris ejuſdem elixiviationem; & *ſpiritus oleoſus alkalinus* volatilis, empyreumatico-foetidiſſimus per diſtillationem A. B. obtentus. Etenim ſive cum ſimplici Solani ſucco, ſive cum addito alumine, aliiſve, pro varia

(9) Immutabiles fere colores ſetae nemo hactenus indidit, licet dentur varii eorum mutabilitatis gradus, plus minuſve facile inducendi, dum aëri, & Soli ſeta diutius exponitur.

ingredientium applicatione, & proportione, ea producta communicant immersae setae varios colores maxime nitidos, & vivaces, griseos, argenteos, atque caeruleſcentes. Si loco salis Sparrii modo laudati sal aliud alkali fixum ex. gr. tartari adhibeatur, memorati colores nullatenus sese produnt: unde etiam eruitur notabile horum fixorum salium, novumque discrimen; utlibet in pluribus aliis proprietatibus inter se vere conveniant.

VIII.

Solani succus in aqua leviter nitrata solutus griseum pulchrum caeteris intensiorem setae colorem communicat.

IX

Seta sapone minime dealbata, seu cruda, tum etiam alumine nullatenus penetrata hujus tincturas, seu principia colorantia baccarum Solani per se satis facile, & melius recipit, & firmius tenet, quam sapone, & alumine praeparata. Immo, si saponem adhibitum nimia copia alkalini salis ingrediatur, praestabit semel setam intra aquam limonum succo leviter acidulatam immergere, tum ex aqua fontis saepius eluere, ut deinde purpureus color melius, nec ad caeruleum inclinans setae communicetur per Solani succum tingendae.

X

Praeter hucusque dictos colores alii enati sunt ex quorumdam tincturae ingredientium connubio, medii veluti, & quales ab alterutro ingredientium obtineri non possunt. Inter hos fuit supra setam color nuceus variae intensitatis ad rubicundum vergens; murinus, griseus margaritaceus clarus, caerulans, caffè tosti, vel magis clari, & rubescentis, &c. de quibus nihil addo, quia aeque solidi ac optimi magis facile, aut minori sumptu aliter parari possunt.

SECOND MÉMOIRE

Sur la differente diſſolubilité de ſels neutres dans l'eſprit de vin, (1) *contenant des obſervations particulières ſur pluſieurs de ces ſels.*

PAR M.r MAQUER.

Quoique l'objet que j'aie eu principalement en vüe dans ce travail, ait été de reconnoitre l'action de l'eſprit de vin ſur les ſels neutres, c'eſt-à dire ſur les compoſés qui réſultent de l'union d'un acide quelconque avec une ſubſtance de quelque nature qu'elle ſoit, j'ai ſenti cependant, en continuant ces recherches, qu'il étoit néceſſaire de les étendre encore plus loin, & de déterminer, autant que cela ſeroit poſſible, la manière dont l'eſprit de vin agit ſur les ſubſtances mêmes, dont l'union peut former des ſels neutres.

Les phénomènes de combinaiſons que préſente ce diſſolvant avec les acides vitriolique, nitreux & marin, étant déjà bien connus par les travaux d'un grand nombre de Chimiſtes très-éclairés, j'ai cru qu'il étoit inutile de revenir ſur cette matière qui paroit éclaircie autant qu'elle peut l'être. Mais il n'en eſt pas de même de ceux que l'eſprit ardent peut offrir avec les ſubſtances ſuſceptibles de s'unir aux acides, & principalement avec les matières ſalines alkalines. J'ai penſé par cette raiſon qu'il étoit à propos de faire quelques expériences ſur ces dernières, avant d'aller

(1) Le premier Mémoire ſe trouve dans le III Vol.

plus loin ; il auroit même, ſans-doute, été mieux de s'en occuper d'abord ; mais dans des recherches comme celles-ci qui n'ont pour but que de bien conſtater des faits eſſentiels à connoître, & de raſſembler des matériaux qui pourront être employés par la ſuite avec ſuccès, il eſt toujours tems de fouiller dans la carrière & d'en extraire les matières premières. Je reviendrai donc, pour ainſi dire ici, ſur mes pas ; je commencerai par l'examen des phénomènes qu'offre l'eſprit de vin avec les alkalis fixes, végétal & minéral, avec l'alkali volatil, enſuite avant que de traiter des ſels neutres tartareux ou tartres ſolubles, dont il s'agira principalement dans ce ſecond mémoire, je reconnoitrai la manière dont ſe comporte l'acide tartareux pur avec l'eſprit de vin, & enfin je le terminerai par deux épreuves ſur l'arſenic & le ſel neutre arſenical, qui ſeront ici des eſpéces de hors d'œuvre, mais qui doivent cependant entrer quelque part dans un travail de la nature de celui-ci.

Alkali fixe du tartre.

J'ai pris de l'alkali fixe du tartre, très-blanc, très-ſec, purifié avec tout le ſoin poſſible par les diſſolutions, filtrations, & déſiccation parfaite ; j'ai fait bouillir deſſus dans un matras, du même eſprit de vin qui m'avoit ſervi pour les expériences de mon premier mémoire.

Au premier contact de l'eſprit de vin, l'alkali a commencé par ſe pelotter, & enſuite a formé par l'ebullition, une ſorte de liqueur épaiſſe blanche & trouble qui occupoit le fond du matras. Cette eſpéce de liquefaction du ſel alkali eſt due, comme l'on ſait, à une petite portion de flegme dont l'eſprit de vin le mieux rectifié n'eſt jamais entièrement exempt, quand il l'à été par la ſimple diſtillation, ſans aucun intermède, tel que l'eſt celui dont je me ſers. Je dois faire obſerver auſſi que dans l'expé-

rience dont je parle là quantité de l'eſprit de vin étoit trois fois plus grande que celle de l'alkali.

Après l'ebullition, j'ai décanté l'eſprit de vin encore très-chaud, puis je l'ai filtré par le papier gris quoi qu'il fut fort clair; il a paſſé très-limpide.

Quelques gouttes de cet eſprit de vin miſes ſur une glace ſe ſont évaporées en aſſez peu de tems à l'air libre, & y ont laiſſé des criſtaux figurés en lames d'épée; quelques uns de ces criſtaux étoient ſolitaires; mais la plus part étoient croiſés deux à deux l'un ſur l'autre, avec cette ſingularité, que l'un beaucoup moins long que l'autre coupoit ce dernier à angles droits vers une de ſes extrémités de manière qu'ils repreſentoient enſemble une croix, ou encore mieux une de ces épées à l'antique dont la poignée & la garde forment une croix.

J'ai fait évaporer à une chaleur douce de bain de ſable cet eſprit de vin qui avoit bouilli ſur l'alkali fixe du tartre, à meſure que la liqueur s'évaporoit, elle contractoit une couleur d'abord jaune, puis rouſsâtre & une ſaveur acre alkaline.

Lors qu'elle a été évaporée aux trois quarts, j'en ai mis une portion dans une capſule de verre, pour la laiſſer achever de s'évaporer à la ſeule chaleur de l'air; il s'eſt formé dans celle-ci des criſtaux d'une forme toute différente : c'étoient des pyramides quadrangulaires fort baſſes, dont les élemens étoient des quarrés réguliers, poſés les uns ſur les autres, & décroiſſans depuis la baſe, juſqu'au ſommet; on diſtinguait très-bien au microſcope la ſéparation de ces élémens quarrés qui formoient comme des eſpéces d'eſcaliers, ou de gradins ſur chaque face de la pyramide.

Une demi once du même eſprit de vin qui avoit bouilli ſur l'alkali du tartre, évaporée tout de ſuite juſqu'à ſiccité au bain de ſable à une chaleur aſſez forte, dans une

petite taſſe ou capſule de porcelaine, a laiſſé deux grains d'une matière rouſſe, foncée, dans laquelle il n'y avoit aucune criſtalliſation. Cette matière avoit une ſaveur âcre alkaline, verdiſſoit fortement le ſyrop violat, & avoit les caractères d'un composé huileux, ſavonneux alkalin; elle ſe diſſolvoit également bien dans l'eau, ou dans l'eſprit de vin.

La flamme d'une autre demi once du même eſprit de vin, ne differoit point ſenſiblement de celle de l'eſprit de vin pur, il eſt reſté dans la capſule qui avoit ſervi à cette déflagration un enduit d'une matière toute ſemblable à celle que je viens de décrire.

Une circonſtance remarquable de l'expérience dont je viens de rendre compte, c'eſt que l'eſpéce de diſſolution aqueuſe de l'alkali ſur lequel j'avois fait bouillir l'eſprit de vin, s'eſt coagulée toute entière par le ſeul refroidiſſement, en une maſſe blanche, ſaline, criſtalliſée, mais en criſtaux infiniment petits, confus, entaſſés, & dont je n'ai pu déterminer d'abord la forme à cauſe de leur petiteſſe & probablement auſſi à cauſe de leur irrégularité & de leur confuſion.

L'ayant rediſſous dans de l'eau & laiſſé criſtalliſer dans une capſule de verre, j'ai obtenu une criſtalliſation en belles ramifications compoſées d'aiguilles ou de filamens longs; mais qui par cela même ne me préſentant point de criſtaux ſolitaires, ne m'en laiſſoit point diſtinguer la vraie forme; il y avoit cependant dans des intervalles de ces ramifications quelques criſtaux ſolitaires très-petits, bien reguliers, & formant des tranches de priſmes exagonaux ou des ſolides abſolument ſemblables à des carreaux de chambre.

On fait pour l'uſage de la médecine une préparation nommée *teinture de ſel de tartre* & qui conſiſte à verſer ſur de l'alkali fixe de tartre, bien calciné & encore tout

chaud, de l'eſprit de vin rectifié, & à laiſſer ce mélange en digeſtion dans un matras au bain de ſable pendant pluſieurs jours, ou juſqu'à ce que l'eſprit de vin ait acquis une couleur jaune foncée.

Le reſultat de cette préparation devant avoir beaucoup de rapport avec celui de l'expérience dont je viens de rendre compte, j'ai voulu comparer l'un à l'autre.

J'avois environ dix ou douze onces de cette teinture de ſel de tartre extremement foncée en couleur, & qui étoit dans mon laboratoire depuis plus de vingt ans dans une bouteille bouchée d'un ſimple bouchon de liège.

J'ai trouvé en l'examinant que cette liqueur avoit perdu une partie de ſa couleur, quoi qu'elle en conſervat encore beaucoup, & qu'il s'étoit formé au fond un depôt partie liquide, partie ſolide d'une intenſité de couleur beaucoup plus grande.

Cette liqueur verdiſſoit le ſyrop violat, avoit une ſaveur mêlée de la ſpiritueuſe, & de l'alkaline. Sa flamme ne différoit point ſenſiblement de celle de l'eſprit de vin pur. En ayant fait évaporer une portion dans une capſule de verre à l'air libre, après que la liqueur a été évaporeé à peu près au trois quarts, j'ai obſerve qu'elle paroiſſoit un mélange de deux liqueurs très différentes, & très diſtinctes; l'une ſans couleur comme de l'eau, & l'autre d'un jaune foncé; cette dernière nageoit dans la première en forme de gouttes ou de globules exactement ſemblables à ceux d'une huile jaune qui auroit été mêlée avec de l'eau par la ſecouſſe. Après l'évaporation totale, à une chaleur douce de bain de ſable, elle a laiſſé dans la capſule un enduit d'un jaune brun, criſtaliſé confuſément, mais formant cependant très ſenſiblement des lames en quarrés longs.

Au fond de la bouteille qui contenoit cette ancienne teinture de ſel de tartre; il y avoit, comme je l'ai dit,

un dépôt dont une partie étoit fluide, & formoit environ deux gros d'une liqueur transparente, mais d'un jaune fort brun.

J'ai séparé cette liqueur par l'entonnoir; elle ne s'est point dissoute dans de nouvel esprit de vin que j'ai versé dessus; sa saveur étoit acre, très alkaline, & nullement spiritueuse: par l'évaporation à l'air libre elle s'est épaissie, & a formé différentes cristallisations; elle s'est dissoute entièrement dans l'eau; l'acide marin affoibli, s'y est mêlé avec effervescence, & en a séparé des floccons bruns.

Cette liqueur étoit, comme je l'ai dit, au fond de la bouteille mêlée d'une certaine quantité de matière solide de même couleur; cette derniere examinée séparément avoit une consistance gélatineuse, elle ne s'est laissé dissoudre, ni par l'eau, ni par l'esprit de vin, ni par les alkalis, ni par les acides.

Toute la bouteille étoit enduite intérieurement d'une pellicule, presque semblable pour le coup d'œil aux incrustations que fait l'eau de chaux, & a resisté à tous les dissolvans, & à tous les frottemens que j'ai pu employer pour l'enlever.

Enfin pour terminer ce qui concerne cette ancienne teinture de sel de tartre, j'en ai pris une demi once de très claire, & bien séparée des différens dépôts dont je viens de parler, & l'ayant fait évaporer au bain de sable jusqu'à siccité dans une capsule de porcelaine, elle y a laissé dix grains d'un résidu de couleur de caramel, ou sucre à demi brulé; ce résidu étoit alkalin, savonneux, très déliquescent, & d'une odeur forte que je ne puis comparer à aucune odeur connue.

Ces effets de l'esprit de vin sur l'alkali fixe végétal prouvent bien manifestement qu'il en peut dissoudre, surtout avec le temps une quantité assez sensible; mais il est

essentiel de remarquer que cette dissolution n' est point entièrement semblable à celle des sels neutres dans l' eau, ou même dans l' esprit de vin, car dans ces dernieres ni le dissolvant ni le sel dissous ne reçoivent d' altération sensible ; ce dont on peut s' assurer en les examinant après les avoir séparés l' un de l' autre, au lieu que dans celle de l' alkali fixe par l' esprit de vin, il paroit que ces deux substances s'alterent & se décomposent en partie, & reciproquement.

L' état de l' alkali fixe qui a été dissous dans l' esprit de vin, & qui en a été ensuite séparé, soit par l' évaporation de ce dissolvant, comme dans la première experience, soit par dépôt, & avec le temps, comme dans mon ancienne teinture de sel de tartre, prouve qu' il est chargé d' une matière huileuse qu' il a extraite de l' esprit de vin, ou qu' il a formée en agissant sur les principes de ce composé, & d' une autre part, le dépôt solide gélatineux, ainsi que l' enduit terreux de la bouteille, qui proviennent sans doute de l' alkali, indiquent que cette matière saline, est aussi en partie décomposée par l' action de l' esprit de vin ; mais je n' entreprends point pour le présent de déterminer exactement en quoi consistent ces altérations, & quelles en sont les causes, par ce qu' il faudroit pour celà une nombreuse suite d' expériences d' un genre tout différent de celles dont il s' agit dans ce mémoire, & qui me détourneroit de mon objet, au quel je reviens en examinant suivant mon plan d' autres matières salines.

Alkali marin.

L' eſprit de vin, après avoir bouilli ſur ce ſel bien deſſeché, & après avoir été filtré, a brulé avec une flamme qui ne différoit pas bien ſenſiblement de celle de l' eſprit de vin pur, il avoit une ſaveur un peu ſalée; ſoumis à l' évaporation au bain de ſable, lorſqu' il a été diminué à peu près des trois quarts, il avoit une couleur rouſſâtre, & une ſaveur un peu ſalée, une partie de cette liqueur reduite, & évaporée à l' air libre ſur une glace, y a laiſſé des criſtaux cubiques bien réguliers.

La demi once de cet eſprit de vin évaporée juſqu' à ſiccité, dans une capſule de porcelaine, a laiſſé deux grains d' une matière ſaline, rouſſâtre d' une ſaveur de ſel marin.

On voit par cette expérience que l' alkali minéral ſe comporte avec l' eſprit de vin de même que l' alkali végétal; il s' en diſſout la même quantité $\frac{1}{288}$. La couleur rouſſâtre de celui qui a été diſſous indique qu' il agit auſſi ſur la partie huileuſe, de l' eſprit de vin ou ſur les principes de ce compoſé qui ſont propres à former une combinaiſon huileuſe, de la même manière que le fait l' alkali fixe végétal.

Alkali volatil du ſel ammoniac.

Je me ſuis ſervi pour reconnoître la diſſolubilité de cette matière ſaline dans l'eſprit de vin, de l'alkali volatil concret qui avoit été dégagé du ſel ammoniac par l'intermède de l' alkali fixe végétal, j'ai laiſſé évaporer à l' air libre ſur une glace une portion de l' eſprit de vin bien filtré que j' avois fait bouillir dans un matras ſur cet alkali volatil; il s' eſt formé par cette évaporation une criſtalliſation aſſez abondante dans la quelle je n' ai pu diſtinguer même à l' aide d' une forte loupe aucun criſtal ſolitaire ou iſolé

d' une

d' une forme regulière ; mais l' enſemble de cette criſtalliſation repréſentoit tout ce qu' on peut imaginer de plus beau & de mieux deſſiné en ramifications, arboriſations, tiges très agréablement courbées, & garnies de larges feuillages. Mais par le refroidiſſement du reſte de la liqueur dans une fiole bouchée, il s' eſt formé une quantité aſſez conſidérable de criſtaux ſéparés, & non groupés, figurés comme des tranches de colonnes priſmatiques à ſix côtés, ſans y comprendre les faces ſupérieure & inférieure, qui étoient les deux grandes faces de chaque criſtal; ces faces étoient par conſéquent des exagones ; mais il n' y en avoit qu' un petit nombre qui fuſſent réguliers: dans la plus part il y avoit un, deux, ou trois côtés plus petits que les autres.

Voila, comme on voit deux criſtalliſations bien différentes l' une de l' autre d' une même matière ſaline, diſſoute dans la meme liqueur, mais la première s' eſt faite par l' évaporation ſur une ſurface plane, & la ſeconde par le refroidiſſement dans un vaiſſeau ſphérique, & ç' a été ſans doute de ces ſeules différences qu' a dépendu la forme ſi defférente de ces deux criſtalliſations ; ces effets ſont très ordinaires dans la criſtalliſation ; ils prouvent combien il reſte d' obſervations à faire ſur les phénomènes de cette opération importante.

Je crois qu' on peut conclure de ce que je viens d' expoſer, que le vraie forme des criſtaux de l' alkali volatil concret eſt celle que j' ai obtenue par le refroidiſſement ſans évaporation, & je préſume que ce moyen eſt le ſeul d' obtenir des criſtaux ſolitaires, & réguliers de cette matière ſaline.

L' alkali volatil étant aumoins auſſi évaporable que l' eſprit de vin, je ne pouvois me ſervir de l' évaporation pour déterminer combien l' eſprit de vin pouvoit en diſſoudre à l' aide de la chaleur de l' ébullition comme je l' ai pratiqué

pour tous les autres ſels; & la diſtillation étant une véritable évaporation dans les vaiſſeaux clos, ce dernier moyen ne paroiſſoit guère plus propre que le premier à remplir mon objet; j' ai voulu voir néanmoins ſi à l' aide d' une chaleur bien ménagée dans les vaiſſeaux clos, on ne pourroit point parvenir à faire la ſéparation que j' avois en vue; j' ai donc mis dans une cornue de verre de mon eſprit de vin encore chaud & ſaturé d' alkali volatil par l' ébullition, & après y avoir luté un récipient très exactement, j' ai procédé à la diſtillation à une chaleur des plus foibles du bain de ſable. Il a paſſé d' abord de l'alkali volatil qui s' eſt criſtalliſé en belles ramifications ſur les parois du récipient; mais preſque en même temps, il eſt monté auſſi de l' eſprit de vin encore très chargé d'alkali volatil, & la diſtillation ayant été ceſſée après que les trois quarts de la liqueur ont été paſſé dans le récipient, le quart reſtant dans la cornue s' eſt trouvé, à en juger par ſon odeur, tout auſſi chargé d' alkali volatil qu' il l' étoit avant cette opération, & j' en ai conclu qu' il falloit avoir recours à un autre moyen pour déterminer la quantité d' alkali volatil que l' eſprit de vin peut diſſoudre à l' aide de l' ébullition.

Pour y parvenir j' ai mis dans une fiole un gros d' alkali volatil concret; j' ai fait bouillir deſſus, la fiole étant bouchée, une once de mon eſprit de vin; enſuite je l'ai décanté tout chaud, & après avoir laiſſé bien égouter la fiole, & le ſel qu' elle contenoit, j' ai trouvé qu' elle ne contenoit plus qu' un demi gros de ſel, d' ou j' ai conclu que la demi once d' eſprit de vin avoit diſſous, à l' aide de l' ébullition, 18 grains ou $\frac{18}{288}$ d' alkali volatil concret.

J' ai obſervé dans cette expérience que, malgré la promptitude avec la quelle j' avois décanté l' eſprit de vin, chargé d' alkali volatil, le peu qui en étoit reſté adhérent au col, & aux parois du matras, y avoit formé, avant qu' il pût-

être parfaitement égouté, des criſtalliſations, partie en aiguilles entre croiſées, partie en criſtaux exagonaux ſemblables à ceux qui ont été décrits ci-deſſus.

Les phénomènes de criſtalliſation par refroidiſſement & par évaporation que l' alkali volatil m' avoit préſentés avec l' eſprit de vin, m' ont paru mériter que je vérifiaſſe s'ils ſeroient les mêmes avec l'eau, j' ai donc fait diſſoudre, à l' aide de la chaleur beaucoup d'alkali volatil dans de l'eau pure, & ayant bien bouché la fiole dans la quelle cette diſſolution s' étoit faite, je l' ai laiſſé refroidir à l' air, le termométre de Réaumur étant alors à 13 dégrés au deſſus de zero; il s' eſt formé par le refroidiſſement une grande quantité de criſtaux ſolitaires en partie à la ſurface, mais en plus grande quantité au fond de la liqueur; ces criſtaux avoient exactement la même forme éxagonale que ceux qui s' étoient formés par refroidiſſement dans l' eſprit de vin; il n' y avoit point d' aiguilles ni de ramifications aux parois de la bouteille.

Après que cette liqueur a eu dépoſé ces criſtaux par refroidiſſement, j' en ai mis une portion ſur une glace plane, pour la faire criſtalliſer par évaporation; il s' y eſt formé encore quelques criſtaux ſemblables aux précédens; mais la plus grande partie de la criſtalliſation s' eſt faite en belles ramifications branchues; il eſt à remarquer qu' elles étoient toutes formées par des lignes droites, faiſant différens angles les unes avec les autres, & ſans aucune de ces belles courbures, dont j' ai parlé plus haut; il y avoit parmi ces criſtaux un aſſez grand nombre d' aiguilles priſmatiques quadrangulaires.

Je ferai remarquer de plus qu' ayant voulu faire criſtalliſer de même par évaporation une diſſolution d' alkali volatil dans l' eſprit de vin, la quelle avoit dépoſé depuis huit jours tout ce qu'elle pouvoit former de criſtaux par le refroidiſſement, elle n' a formé par l' évaporation ſur la

glace plane aucune eſpèce de ramifications, mais ſeulement une grande quantité de criſtaux très petits & informes, comme des grains de ſablon, ce qui me fait préſumer que l'alkali volatil ne peut ſe criſtalliſer en ramifications, & ſurtout prendre des formes courbes agréables que lors qu'il n'eſt étendu que par une petite quantité de diſſolvant ſpiritueux, ou peut-être même ſimplement aqueux, mais ces phénomènes de criſtalliſation m'éloignant de mon objet principal, je me hâte d'y revenir par l'examen de la diſſolubilité de différens ſels neutres dans l'eſprit de vin, & je commence par pluſieurs tartres ſolubles.

Tartre ſoluble, ou ſel végétal.

Ce ſel réſulte, comme on ſait de la ſaturation de la crême de tartre par l'alkali fixe du tartre, ou végétal.

L'eſprit de vin ayant bouilli ſur ce ſel bien deſſeché, puis ayant été filtré tout chaud a fourni par l'évaporation juſqu'à ſiccité dans une capſule de porcelaine une matière ſaline jaunâtre, à raiſon de deux grains, ou $\frac{2}{288}$ par demi once.

La flamme de cet eſprit de vin étoit un peu décrépitante, ce qui n'arrive point à celle de l'eſprit de vin pur.

Ce diſſolvant chargé de ce ſel a fourni par l'évaporation ſpontanée, dans une capſule de verre, des criſtaux en piramides quadrangulairés, dont quelques unes étoient tronquées par la pointe: pluſieurs de ces criſtaux étoient ſolitaires, & très réguliers, l'eau chargée de ce même ſel a donné par l'évaporation à l'air libre, dans une capſule de verre, des criſtaux, dont quelques uns étoient ſolitaires, & formés en priſmes à quatre côtés pointus par les deux bouts: ceux qui étoient groupés étoient joints en grand nombre tous par un de leurs bouts, & formoient des aſſemblages en rond tout heriſſés. La couleur jaune du ſel

végétal séparé de l' esprit de vin par l' évaporation à siccité semble indiquer que ce sel reçoit quelque altération par sa dissolution dans l' esprit de vin, & par sa deficcation, & ce qui confirme ce soupçon, c' est que le sel sur le quel l' esprit de vin avoit bouilli, redissous dans l' eau n' a fait qu' une dissolution trouble.

Sel de Saignette.

L' esprit de vin n' a point dissous une quantité appréciable de ce sel bien desseché à l' air, & la flamme de celui qui avoit bouilli dessus ne differoit point de celle de l' esprit de vin pur. Mais ayant voulu répéter cette expérience en me servant de sel de saignette non desseché, cristallisé, & contenant par conséquent son eau de cristallisation, cela m' a donné lieu d' observer un effet qui me paroit singulier, & que je ne dois pas passer sous silence; c' est que au dégré de chaleur nécessaire pour faire bouillir l' esprit de vin, le quel, comme l' on sait n' est pas bien considérable, ce sel s' est liquefié sous l' esprit de vin, & a formé une liqueur fluide, & transparente comme de l' eau; cette liqueur occupoit le fond du matras: elle s' est coagulée par le refroidissement en une masse saline solide, & d' une seule pièce.

Cet effet prouve la grande facilité qu' a le sel de saignette à se liquefier à l' aide de son eau de cristallisation; mais il en résulte aussi que l' esprit de vin ne peut lui enlever cette même eau, quoiqu' il la perde par la seule action de l' air. En seroit-il de même de tous les autres sels? C' est ce qui n' est pas à présumer; il y a lieu de croire au contraire qu' on trouvera à cet égard une grande diversité dans les différens sels neutres; mais c' est aussi ce qu' on ne pourra connoître que par une nouvelle suite d' expériences dépendantes de celles que j' ai commencées, & qui mérite bien d' être entreprise.

Tartre ſoluble par la chaux.

Ce ſel étoit en très beaux & gros criſtaux tranſparens; traité avec l'eſprit de vin comme le precédent, ſans deſiccation préliminaire, il s'eſt comporté de même, mais il ne m'a pas préſenté le phénomène de la liquéfaction ſous l'eſprit de vin.

Tartre ſoluble ammoniacal.

J'ai verſé une diſſolution d'alkali volatil concret ſur de la crême de tartre reduite en poudre fine, & miſe dans un matras; il s'eſt excité à froid une effervescence aſſez conſidérable, une grande partie de la crême de tartre a été diſſoute, & la diſſolution a été achevée à l'aide de la chaleur modérée du bain de ſable, avec une legère effervescence; j'ai ajouté à deſſein un peu d'excés d'alkali volatil, puis ayant filtré la liqueur toute chaude, elle a paſſé très tranſparente, d'un beau jaune foncé, & d'une ſaveur de ſel végétal,

Cette liqueur évaporée à l'air libre ſur une glace a formé une criſtalliſation compoſée d'aiguilles en lames longues, & tronquées, partant d'un centre, ou d'un pédicule commun, & repréſentant par leur divergence une eſpèce d'eventail.

Une autre portion de la même liqueur évaporée au bain de ſable juſqu'à pellicule dans une capſule de verre a donné par le refroidiſſement deux ſortes de criſtaux, fort différens, pour la forme; les uns étoient de petits criſtaux allongés, renflés par le milieu, & ſe terminant en longues pointes par chaque bout, comme des fuſeaux; les autres qui ſe ſont formés les derniers, & à ce que je crois autant par évaporation que par refroidiſſement, étoient de gros priſmes à quatre, cinq, & ſix côtés. Quoiqu'ils fuſſent

ſolitaires, ils paroiſſoient de même eſpèce que ceux qui s' étoient aſſemblés en éventail ſur la glace. Le reſte de la liqueur évaporée dans une capſule à une chaleur douce de bain de ſable, mais juſqu'à forte pellicule a donné par le refroidiſſement & par l' évaporation, qui continuoit encore, les mêmes criſtalliſations en éventail; mais les rayons au lieu d' être des lames, comme ceux qui s' étoient formés ſur la glace, étoient des priſmes comme ceux dont il a été parlé plus haut à cauſe de la profondeur du vaſe dans le quel cette dernière criſtalliſation s'étoit faite: comme ces criſtaux n' étoient pas tous d' une égale longueur, ils repréſentoient aſſez bien une gloire rayonnante pareille à celles que font les peintres, & les ſculpteurs.

Le tartre ſoluble ammoniacal étant de nature à ſe décompoſer par une chaleur fort peu conſidérable, je n' ai oſé le porter à la plus grande ſiccité, dans la crainte de l' altérer; mais après lui avoir enlevé toute humidité ſurabondante le plus qu' il a été poſſible par une deſiccation bien ménagée, je l' ai fait bouillir dans l' eſprit de vin, comme les précédens.

Cet eſprit de vin filtré a brulé comme l' eſprit de vin pur; ſa flamme étoit ſeulement accompagnée de quelques petites fulgurations rouges. En en faiſant évaporer une demi once dans la capſule de porcelaine, j' ai remarqué qu' il répandoit une odeur plus ſuave que celle de l' eſprit de vin ordinaire, & cette demi once, après ſon entière évaporation a laiſſé un enduit d' un jaune brun peſant un grain & demi. Ce réſidu ne ſe diſſolvoit pas dans l' eau, & n' étoit par conſequent ni une matière ſaline, ni une matière ſavonneuſe, il s' eſt très bien rediſſous dans de nouvel eſprit de vin. Je crois qu'on ne peut le regarder que comme une portion d' huile qui ſe ſépare, ſoit de la crême de tartre, ſoit de l' alkali volatil, ſoit enfin de l'un & de l' autre lors qu'on les combine: c' étoit probablement à

cette partie huileuſe qu' étoit dûe la couleur jaune de ma diſſolution de tartre ſoluble ammoniacal dont j' ai fait mention en commençant cet article.

Avant de le finir je ne dois pas oublier de faire mention d' un petit dépôt ſalin ſingulier en petits grains irréguliers, & mêmes comme ceux du ſablon le plus fin, qui s' eſt ſéparé par le refroidiſſement de ma diſſolution de tartre ſoluble ammoniacal ; j' en avois trop peu pour en faire un examen exact ; je me ſuis contenté de m' aſſurer que cette matière craquoit ſous la dent, qu' elle n' avoit point de ſaveur bien ſenſible, ni preſque de diſſolubilité dans l'eau, & enfin que l' acide vitriolique, non plus que l' alkali fixe, ne lui ont occaſionné aucun changement ſenſible. Cette matière provenoit ſans doute de la crême de tartre, & mérite d' être examinée avec plus de détail, car la crême de tartre elle même n' eſt pas encore bien connue. M. Margraf, & M. Rouelle ont prouvé par des expériences déciſives qu' elle contenoit de l' alkali fixe végétal tout formé, & c' eſt aſſurément une connoiſſance eſſentielle dont nous ſommes redevables à ces celèbres chymiſtes ; mais cet alkali n' eſt point libre dans la crême de tartre ; il y eſt certainement combiné avec quelqu' autre ſubſtance, peut-être même avec pluſieurs qui ne peuvent être bien connues que par de nouvelles recherches.

Tartre ſoluble antimonié, ou Tartre émétique.

Ce ſel que j' ai employé criſtalliſé, & bien ſec s' eſt comporté avec l' eſprit de vin comme le tartre ſoluble par la chaux ; il n' a occaſionné aucun changement à ſa flamme ; une demi once de l' eſprit de vin qui avoit bouilli deſſus n' a laiſſé après ſon entière évaporation dans la capſule de porcelaine qu' une tache aſſez légère d' un enduit de couleur de maron, de nature huileuſe, & que l' eau

ne

ne diſſolvoit point. J' ai cependant remarqué que les parois de la bouteille dans la quelle avoit été filtré l' eſprit de vin tout chaud après avoir bouilli ſur le tartre émétique étoient garnis dans quelques endroits de criſtaux longs plus fins que des cheveux, implantés diverſement par une de leurs extrémités les uns ſur les autres; mais ces criſtaux étoient ſi fins, & en ſi petite quantité que j' eſtime qu'ils ne pouvoient guère peſer en tout qu' un quarantième, ou même un cinquantième de grain.

Arſenic.

En verſant l' eſprit de vin à froid ſur de l' arſenic blanc, criſtallin, & en poudre fine j' ai obſervé que cette liqueur le mouilloit bien plus facilement que l' eau ne le mouille; elle en a diſſous à l' aide de l' ebullition $\frac{1}{75}$ de ſon poids ou $\frac{4}{378}$; le réſidu de l' évaporation étoit verdâtre; la flamme de l' eſprit de vin chargé d' arſenic ne m' a paru avoir rien de particulier.

Sel neutre arſénical.

Ce ſel, que j' ai fait connoître dans les mémoires de l' académie des ſciences de Paris année 1746, s' eſt diſſous dans l' eſprit de vin bouillant dans la proportion de trois grains par once. La flamme de l' eſprit de vin tenant ce ſel en diſſolution m' a préſenté une ſingularité, qui me paroit mériter beaucoup d' attention, ſavoir que, ſans différer eſſentiellement de celle de l' eſprit de vin pur, elle étoit bordée depuis le bas juſqu' en haut d' une autre flamme, moins lumineuſe, & très ſenſiblement verte.

On ſait que le ſel ſédatif, qui colore auſſi en verd la flamme de l' eſprit de vin, a quelques proprietés communes avec l' arſenic, telles que la vitreſcibilité, le pouvoir

de décompoſer le nitre &c. la circonſtance donc que je viens d' expoſer ſemble montrer encore une nouvelle conformité entre ces deux ſubſtances. Je n' oſe cependant la donner ici comme entièrement conſtatée, parceque, quoique j' aie tout lieu de croire que l' arſenic ainſi que le nître que j' avois employés pour faire le ſel neutre arſénical, dont je me ſuis ſervi, étoient purs, & exempts du mélange de cuivre; cependant comme il y avoit très longtemps que j' avois fait ce ſel, je crois qu' il eſt à propos avant de prononcer affirmativement ſur ce fait de le vérifier en compoſant de nouveau ſel neutre arſénical avec toutes les précautions néceſſaires pour m' aſſurer qu' il ne contiendra aucune parcelle de cuivre, & je n' aurois pas manqué de le faire dès à préſent ſi le peu de temps qui me reſtoit pour achever ce mémoire, me l' eut permis.

A Paris ce 4 juin 1773.

REFLEXIONS

SUR UN ESSAI DE CHIMIE COMPARÉE

PAR M.r LE COMTE DE SALUCES.

Ce ſeroit paroître débuter par un paradoxe que d'oſer avancer que tout eſt grand dans la nature & que tout y peut paroitre d'une petiteſſe inconcevable ; tant qu'on s'arrete, en effet à examiner la face d'un objet, ou cet objet même de tous les côtés, ſans aucun rapport avec d'autres, on ne pourra ſe former aucune grande idée ; mais lorſque en ſaiſiſſant les rélations qui peuvent lier le plus petit objet, ou le fait par lui même le plus comun à d'autres, d'ou il reſulte un aſſemblage de verités, cet enchainement ne peut à moins de reveiller des idées étenduës & lumineuſes ; dont l'utilité ſera enſuite plus ou moins ſenſible ſuivant l'etendue de ces mêmes raports.

Le premier pas qui ſe préſente dans la marche naturelle de l'eſprit humain eſt celui de comparer les objets entre eux ; ſi l'on s'en tient toujours aux caractères ſenſibles, qui ſervent à diſtinguer ces objets entr'eux, il doit neceſſairement en reſulter une monotonie qui reſſerre nos connoiſſances ; ſi au contraire on ſe permet un plus grand nombre de combinaiſons, on parviendra non ſeulement à répandre plus de lumières pour la conduite, & pour le bien de l'homme, mais ce qui intéreſſe bien plus encore, on parviendra à ſimplifier les méthodes & à approcher par-là toujours plus des routes que tient la nature.

Si un Chimiſte ne ſçait que ſon art, ſi un Naturaliſte n'étudie que la ſienne, ſi le Botaniſte & le Phiſicien n'ap-

pliquent chacun qu'à la leur, on n'aura qu'un Erudit, ou un Artiſte plus ou moins ſçavant, & il ne reviendra que des avantages bien peu intéreſſants pour chacune de ces parties, conſiderées en tant que ſciences; c'eſt donc du concours des lumières que toutes les branches de la Philoſophie naturelle peuvent fournir, & ſe prêter qu'on doit attendre des decouvertes utiles aux ſciences, & à la Société: mais en attendant le Génie qui ſache s'elever d'un vol rapide & ſaiſir le fil des vérités éparſes, dont on eſt contraiint de former tant de ſciences à part, nous chercherons à en rapprocher quelques unes qui dépendent de la Chimie, & qui en même tems tirent des ſecours de quelqu'autre partie de la Philoſophie, ou qui en empruntent à leur tour.

I

Les corps ſont ou fluides ou ſolides, ſous ces deux dénominations on peut à la vérité ranger tous les corps de cet Univers, mais elles ne ſuffiſent pas pour nous éclairer d'une manière vraiment Philoſophique.

II

Les corps ſont ou végétaux, ou animaux, ou enfin foſſiles & minéraux, mais c'eſt encore là une notion bien vague. Diſtinguer tous les corps des trois regnes & noter ceux qui ſont ou fluides ou ſolides, n'eſt pas dire encore aſſez; faire le dénombrement de leurs apparences extérieures & de leur tiſſu interne ſeroit un pas un peu plus avancé, ſi ces apparences & ces tiſſus ſont conſtans. Ajouter les propriétés extrinſeques & intrinſeques de ces mêmes corps ſeroit toujours avancer chemin; ſéparer enfin les parties de ces corps par le feu ou par les menſtrues, les recompoſer & les faire reparoitre dans leur premier état eſt encore un

très-grand pas vers la perfection ; mais avec tout ceci, la comparaiſon des produits des parties ainſi ſéparées par la même voye, dans les différents états où ces corps peuvent ſe trouver me paroit offrir un point de vüe trop intéreſſant, pour que le Chimiſte Phyſicien puiſſe negliger d'y apporter la curioſité la plus inſtructive, & toute l'exactitude dont il eſt capable.

I I I

Ce point de vüe je l'avoüe eſt très-vaſte & l'execution en paroitra ſans doute très-difficile : mais ſi l'on reflechit au grand nombre de matériaux que l'on a ſous la main, on verra que les obſtacles ne ſeront pas inſurmontables ; nous allons donc commencer par un petit eſſai qui pourra ſervir à mieux développer mes idées, & à en faire naitre à d'autres peut-être de plus générales & de plus lumineuſes.

I V

L'analyſe étant la voye par laquelle on parvient à décompoſer les corps, & à en ſéparer les parties d'une maniere diſtincte, il me paroit que c'eſt elle principalement qui peut nous fournir les données pour la réſolution de cet important probléme, je dis important parcequ'il me paroit tel, & je ne crois rien dire qui doive allarmer l'homme le plus délicat, car c'eſt une vérité aujourd'hui aſſés généralement reconnue que l'analiſe eſt la clef des decouvertes (d'ailleurs je ſuis bien aiſe d'être forcé par la nature du ſujet à dire bien des choſes qui ont été dites de long-tems) : mais la définition du terme analyſe ne fournit aucune notion poſitive & préciſe ; la diſtinction d'analiſe par le feu en chimie ou d'analyſe par les menſtrues eſt générale mais encore trop vague, la ſéparation des par-

ties des corps par tel moyen que ce ſoit eſt le but qu'on doit ſe propoſer & doit faire l'objet de nos recherches (*).

V

Il eſt de parties qui conſtituent eſſentiellement un corps déterminé & celles-ci ne peuvent être que tout-à-fait ſimples, au moins par raport à nous, & eſſentielles à tel corps, de manière que ſans elles le corps ceſſeroit d'être tel, c'eſt-à-dire de tel genre, & de telle eſpèce: d'autres au contraire ſans fixer neceſſairement la nature du corps ſe trouvent combinées, unies &c. à ces mêmes parties: elles ſont même quelque fois abſolument étrangères, mais elles peuvent cauſer dans certain cas quelque modification à ce corps. (1)

V I

Il eſt donc très-néceſſaire de chercher à découvrir & à diſtinguer autant qu'il eſt poſſible les parties eſſentielles

(*) Il paroitra du premier coúp d'œil qu'il y a ici un abus d'idées ſur le terme d'analyſe, mais la réflexion juſtifiera mon laconiſme.

(1) Pour rendre ma penſée plus clairement il ſuffit de conſidérer, par exemple, qu'il doit néceſſairement ſe trouver des parties aqueuſes, ou pour le dire plus ſimplement de l'eau dans un certain raport déterminé dans toutes les ſubſtances ſalines, ſans quoi ces ſels ceſſeroient d'être tels qu'ils ſont, pendant qu'ils en tiennent une plus grande quantité dans leur criſtalliſation, qu'on peut très-bien leur ôter, ſans qu'ils changent de nature; toute la modification ſe réduiſant alors à leur figure; d'ou il ſuit qu'une partie de l'eau eſt eſſentielle comme nous l'avons dit dans un raport déterminé à une telle eſpéce de ſels, pendant que l'autre partie n'eſt qu'accidentelle quant à la nature, & ne peut être regardée tout au plus que comme une partie intégrante: nous allons raporter encore une exemple pour rendre la choſe plus ſenſible. Monſieur Baumé nous dit dans ſon manuel de Chimie pag. 329 §. 3, que le ſel marin à baſe terreuſe quoique difficile à criſtalliſer, criſtaliſe néanmoins avec celui qui eſt à baſe d'alkali *minéral* & *qu'il* eſt même cauſe qu'on obtient des criſtaux cubiques infiniment plus gros que lorſque le ſel marin eſt *très-pur*: voila donc un exemple qu'il ſe trouve quelque fois dans les corps des parties abſolument étrangéres qui peuvent cependant y cauſer dans certains cas des modifications.

d'un corps, de celles qui ne ſont qu'accidentelles & indifférentes pour ainſi dire à la nature de ce corps, & qui ne contribuent tout au plus qu'à lui faire prendre une forme conſtante : mais ce pas que le raiſonnement porte à faire, eſt ſans contredit de la plus grande difficulté; auſſi n'oſerais-je pas me flater d'y reuſſir toujours, mais pour l'amour de la vérité on me paſſera les reflexions que je ſoumets au jugement des maîtres de l'art.

VII.

Les circonſtances qui contribuent à altérer un corps de même eſpéce ou nature, ſont celles qu'on ne doit jamais négliger, & peut-être qu'elles ſont les plus propres à nous développer bien des myſtères; mais nous y reviendrons, & nous propoſerons en attendant quelques reflexions préliminaires ſur les caractères généraux qui affectent & qu'on découvre dans les corps.

VIII.

Il faudra commencer par un des trois regnes, & après avoir choiſi le genre & l'eſpéce conſidérer ce qui arrive à ce corps par le même moyen dans les différents états ou l'on le ſoumet à l'analyſe; remarquer après ce qu'il a de commun, & les differences ſimples ou compoſées qu'on y obſerve; raprocher enſuite ces vérités des opinions ou des idées qu'on a dans la Chimie ſur ces mêmes objets, & rectifier ainſi & enrichir cette ſcience par le plus grand detail poſſible de vérités utiles. Venons au fait.

. . . . .

IX.

Je commencerai donc par les végétaux, & je me contenterai en premier lieu d'examiner *une généralité.* Les

plantes ſont ou *ſaines ou putrefiées* ; je prends les extrêmes, comme les plus propres à marquer les différences ; les états intermédiaires devant participer des deux en raiſon de leur proximité d'un des extrêmes. Nous allons donc former une table des produits que nous fournit une même plante dans ces deux états par la *diſtillation*, *l'incineration* & la *lixiviation* : cette méthode me paroiſſant la plus préciſe & la plus propre à rapprocher les objets pour en rendre plus ſenſibles les différences, & les changemens.

Table des réſultats qu'on obtient des Plantes ſaines, & putrefiées par la diſtillation, l'incinération, & la lixiviation.

PLANTES.

Saines	Putrefiées
Par la diſtillation.	
1 Phlegme	*etiam* { contenant du ſel volatil.
2 Huile noire empireumatique . .	*etiam*
3 Acide	o . }
4 Huile légère	o . }
* Beaucoup d'air	o . }
5 Charbon ou *caput mortuum* * . .	*etiam* } Alkali volatil.
* qui par *l'Incineration & la lixiviation donne de l'*	}
6 Alkali fixe	o .
7 Terre inſipide	*etiam* (a)

(a) Pour ne pas repeter le produit je me ſers de cette abbréviation.

X

Les produits communs ſont n.° 1 & 2 dans la diſtillation & même le 5 ſi l'on veut, & dans l'incinération & la lixiviation le n.° 7.

X I

Les particuliers aux plantes ſaines ſont les n.° 3, 4 & * dans la diſtillation, & le n.° 6 par l'incinération, & la lixiviation: produits qu'on n'obtient pas dans les plantes putrefiées.

X I I

Les particuliers enfin aux plantes putrefiées, & qu'on ne rencontre pas dans les autres ſont l'alkali volatil: mais cette ſubſtance n'exiſte pas toute formée dans les plantes ſaines de cette claſſe, elle eſt donc vraiment l'ouvrage de la putrefaction; or n'eſt il pas naturel de penſer qu'elle eſt le réſultat des produits qui manquent, ſavoir des n.os 3, 4, & 6.

1 Voyons maintenant les idées que l'on a ſur l'alkali volatil, elles ſont ou théoriques, ou tirées des faits.

2 *L'alkali volatil* dit M. Macquer Elem. de Chim. Theor. p. 230 *eſt compoſé d'une certaine quantité d'acide combiné, & engagé dans une portion de la terre du mixte dont on le tire, & d'une aſſés grande quantité de matière graſſe ou huileuſe &c.*

3 Il n'eſt pas néceſſaire de faire remarquer la conformité qui ſe trouve entre ces idées, & ce que nous donne l'expérience, nous allons paſſer maintenant aux différens tours de main que nous propoſent pluſieurs Auteurs des plus claſſiques pour volatiliſer les alkali fixes, ce qui dans le fond eſt la même choſe que dire de faire des alkalis volatils; ce ſeroit diſputer ſur des mots que de ne pas enviſager d'une manière générale les expreſſions, *rendre volatils*, *changer en ſels volatils*, *volatiliſer &c.* tout bien conſidéré c'eſt toujours ajouter la propriété caractériſtique de

légéreté à un corps qui ne l'avoit pas, & qui au contraire avoit celle d'être fixe, ainſi nous pourſuivrons notre examen.

4 Wan-Helmont dit qu' en faiſant digérer le ſel de canelle avec ſon huile pendant 3 mois en obtient un alkali volatil par la diſtillation.

5 Starckei prétend qu'en imbibant le ſel de tartre de huile de Thérebentine, on rend ce ſel volatil par la digeſtion.

6 Ludovic aſſure que le ſel de tartre imbibé de ſon huile empireumatique ſe ſublime en ſel volatil à une chaleur médiocre.

7 Stahl nous apprend que ce ſel devient volatil en le combinant aux huiles étherées.

8 Nous obſerverons cependant encore une circoſtance, très importante, à mon avis, ſur ce ſujet, ſavoir que pour ſurmonter la difficulté que les alkalis ont à s'unir aux huiles diſtillées on les combine auparavant avec le vinaigre.

9 L'on recomande enfin la combinaiſon des ſels fixes avec le vinaigre diſtillé le tout uni avec un eſprit urineux pour en tirer un alkali volatil.

10 Si nous reflechiſſons maintenant ſur tous ces procedés nous voyons qu' il ſe rencontre dans tous la combinaiſon des mêmes principes que nous fournit la comparaiſon des analyſes, & qui eſt ſi bien énoncée par l'Illuſtre Monſieur Macquer.

XIII

Toute la fineſſe de l'artiſte conſiſte à fournir le principe qui manque : ce qui ne pourroit pas à la verité être déterminé avec préciſion, pour le raport entre ces mêmes principes, mais qui peut très-bien être aperçu & ſenti par un homme de l'art.

XIV

En effet nous voyons que dans le procédé §. 9 ce n'eſt pas une matière auſſi chargée de phlogiſtique que le ſont

les huiles &c. qu'on préſcrit, mais bien plu-tôt un acide plus développé, & cela parceque les ſels fixes contiennent plus de phlogiſtique que le ſel de tartre, ou tout autre ſel parfaitement alkaliſé.

X V

En effet s'il n'arrivoit pas ce que dit Monſieur Macquer d'après Stahl, que les fermentations devant être régardées comme des acheminemens à la putrefaction, les acides reçoivent alors la plus grande altération qu'ils puiſſent éprouver ſans ceſſer d'être ſels, & que cette métamorphoſe de l'acide conſiſte en ce qu'il s'unit à une portion de l'huile, & de la terre ſubtiliſée du mixte, pour former l'alkali volatil, nous devrions retirer des ſels volatils de tous les ſavons, ce qui n'arrive cependant pas dans les ſavons ordinaires, ainſi qu'on s'en aſſure par la diſtillation.

X V I

Le tartre regeneré, ou pour parler plus exactement la terre foliée de tartre ſemble venir à l'appuy de ce ſentiment; tout le monde ſçait que c'eſt un ſubſtance volatile ſavonneuſe (ſi on ne veut pas lui accorder le nom de ſavon) qui réſulte de la combinaiſon du vinaigre diſtillé avec l'alkali-fixe, & perſonne n'ignore auſſi que cet acide végétal contient encore une grande quantité de matière huileuſe, d'ou il réſulte une combinaiſon de ces principes, dont elle tire la propriété de ſa volatilité, & c'eſt ce qui prouve d'autant mieux l'opinion que nous venons d'expoſer, ſavoir que l'alkali volatil eſt le réſultat de l'union qui ſe fait de l'acide dans un raport déterminé avec une terre ſubtiliſée & des matières graſſes; & quoique nos tables puiſſent ſervir de démonſtration nous allons raporter le ſentiment du célébre Boherave à l'article du tartre régéneré p. 149 *Elem. Chem. Venetiis* 1759 *ap. Seb. Coleti dubitavi ſaepe omnibus his conſideratis ſedulo, an non hic eſſet ſal tartari volatilis redditus Helmontianus &c. Quotieſ-*

cumque vero nimia cura ſalem hunc ſolvere depurare, colare, inſpiſſare, calcinare, ſic in album convertere, quis conatur, toties deprehendet, abire in auras, perdique: unde quidem volatilitatem ſic natam diſcit, coeterum oleum perdit, & operam.

XVII

Puiſque nous voyons que les plantes ſaines donnent par la diſtillation des principes que l'on ne trouve plus, au moins ſeparés, dans ces mêmes plantes putrefiées, & que celles-ci fourniſſent un produit qu'on n'obtient pas des premières, ce qui fait un argument aſſés ſolide pour juger que ces principes ſe ſont métamorphoſés en ſe combinant par le mouvement de putrefaction: (2) il me paroit très-convenable de rapprocher ici quelques objets qui ſemblent liés par le même réſultat; nous verrons donc ce qui reſulte de l'Analyſe des plantes ſaines qui fourniſſent beaucoup d'alkali volatil, & nous paſſerons enſuite à faire la comparaiſon des produits que l'on obtient des matières animales qui ſont celles principalement qui en fourniſſent une plus grande quantité.

Cette manière de traiter la Chimie me paroit aſſés méthodique, & propre à donner des idées générales, elle me ſemble au reſte avoir les mêmes avantages que l'anatomie comparée a ſur la ſimple anatomie.

(2) On ne ſeroit pas trop fondé il me paroit à ſuppoſer qu'on ne trouve plus d'acide dans les plantes putrefiées parcequ'on voulut croire qu'il ſe fut diſſipé dans le tems de la fermentation putride; il faudroit alors rendre compte de l'huile, & de l'alkali fixe auſſi: d'ailleurs il ſe préſente une difficulté à mon avis inſurmontable, ſavoir, ſi on ne veut pas que l'acide, l'huile, & l'alkali fixe ſe ſoient combinés & métamorphoſés en alkali volatil, il faut convenir au moins de la préexiſtance de cet alkali volatil, car d'ou pourroit il venir? mais s'il exiſte tout formé pourquoi ne ſe diſſipetoit-il pas auſſi dans le tems du mouvement de putrefaction, puiſque ſa volatilité eſt bien ſupérieure à celle des acides? ces ſuppoſitions ſont ſi dénuées de probabilité qu'il eſt inutile de s'y arreter plus long-temps.

Table des réſultats qu'on obtient des plantes putrefiées qui ne donnoient point d'alkali volatil dans l'état ſain & de celles qui en fourniſſent naturellement ſans paſſer à cet état par les mêmes opérations que les précédentes.

PLANTES.

Putrefiées . . . . Semence de ſynapi

Par la diſtillation.

1 Phlegme contenant du ſel volatil . *etiam*

2 Huile noire épaiſſe & fetide . . . *etiam*

3 Charbon . . . . . *contenant un peu de phoſphore.*

4 Sel volatil concret . . . . . *etiam*

5 . . . o . . . . . *huile légère.*

6 . . . o . . . . . *beaucoup d'air.*

XVIII

Il eſt viſible combien ces ſubſtances d'une nature totalement différente peuvent ſe rapprocher du moment que par quelque opération on les amène au point de fournir les mêmes produits & nous obſerverons que les deux qu'on trouve n.° 5 & 6 dans la ſemence de ſynapi & qui ne ſont plus dans les végétaux putrefiés quoiqu'ils exiſtaſſent dans l'état ſain, diſparoiſſent préciſément par le mouvement de fermentation, d'ailleurs les acides ne paroiſſent ni dans l'une, ni dans l'autre de ces ſubſtances, ce qui eſt très-intéreſſant pour l'objet en queſtion; Il eſt pourtant vrai que le phoſphore concourt à prouver qu'il s'y trouvoit de

l'acide: mais c'eſt précisément ce qui ſert à confirmer que l'alkali volatil eſt l'ouvrage ou de la fermentation putride ou du feu, qui en détruiſant les liens, & l'adhérance entre les parties du mixte rapproche tellement l'acide des parties huileuſes & terreſtres, qu'il en vient un nouveau produit.

Cette théorie qui, je le repete, eſt celle que Monſieur Maquer nous donne dans ſes ouvrages, ſe trouve encore confirmée par les analyſes des matières animales: nous allons nous en occuper maintenant d'une manière également conciſe, c'eſt-à-dire en n'en rapportant que les réſultats en général.

Table des réſultats qu'on obtient des végétaux dans leur différens états, ou ſelon leur nature particulière, & des matières animales ; par la diſtillation, l'incinération, & la lixiviation.

PAR LA DISTILLATION.

	MATIÈRES VÉGÉTALES.			MATIÈRES ANIMALES.	
Saines	*putrefiées*	*analogues aux animales*		*ſang. de boeuf*	*chair de boeuf*
Phlegme	*etiam, contenant du ſel volatil*	*etiam*	*etiam*	*etiam*	*etiam*
Huile noire épaiſſe & empireumatique	*etiam, & foetide*	*etiam*	*etiam*	*etiam*	*etiam*
Acide	o	o	o	o	o
Huile légère	o	*etiam*	*etiam*	*etiam*	*etiam*
		etiam	*etiam*	*etiam*	*etiam*
beaucoup d'air	o	*etiam*	*etiam*	o	o
Charbon	*etiam*	*ſel volatil etiam*	*etiam*	*etiam*	*etiam*
		Le charbon traité par l'incineration, & lixiviation,			
Alkali fixe	o	o	*un peu de phoſphore*	o	*un peu de ſel marin.*

XIX

Cette table comparative fait voir 1° que de toutes les ſubſtances dont on peut retirer de l'alkali volatil ſoit naturellement ſoit en faiſant eſſuyer quelque altération au mixte on ne ſauroit jamais obtenir ni de l'acide ni de l'alkali-fixe.

XX

2° Que les matières qui ont beſoin de la fermentation putride pour fournir l'alkali volatil ne donnent plus certains produits qu'on obtient cependant des matières où il n'eſt pas néceſſaire d'exciter la putrefaction pour avoir l'alkali volatil, & ces produits ſont principalement l'huile légère ou tenue & l'air; perſonne ne s'etonnera de cette différence en reflechiſſant ſur les effets de la putrefaction: quand à l'air il eſt ſenſible qu'il doit s'echapper dans ce mouvement de déſunion entre les parties des mixtes, & quand à l'huile légère il n'eſt pas hors de probabilité qu'elle ſoit néceſſaire pour métamorphoſer l'acide en alkali volatil dans les ſubſtances ou cette matière ſaline n'eſt pas le produit ou de l'élaboration de la nature ou des altérations qui dependent du feu des artiſtes.

XXI

Cette vérité eſt d'autant plus inconteſtable que dans les ſubſtances animales mêmes, qui ſont celles qui abondent le plus en alkali volatil, il y à des parties dont on n'en tire pas un atome; telles ſont les graiſſes, & au contraire elles donnent une grande quantité d'acide: d'ailleurs ce qu'il y a de plus remarquable c'eſt que les mêmes parties donnent des différences ſi ſenſibles ſuivant qu'elles ont ſoufert, ou non la fermentation putride; nous allons rapprocher encore cet objet d'une manière plus générale dans la table ſuivante.

Table

Table des réſultats qu'on obtient, 1.° de toutes les ſubſtances qui fourniſſent naturellement de l'Alkali volatil; 2° de celles qui n'en donnent qu'au moyen de la putréfaction; 3° de celles qui en donnent dans les deux états.

PAR LA DISTILLATION, L'INCINERATION, ET LA LIXIVIATION.

MATIERES

	Végétales		*Animales*	
	Saines . . . . . : Putréfiées.		Saines . . . . . Putréfiées	
	B	C	D	E
	qui ne fourniſſent pas de l'Alkali volatil.	Qui fourniſſent toutes de l'Alkali volatil		
Flegme	*etiam, ſel * . . . * volatil*	*etiam, ſel * . . . * volatil*	*etiam . . . .*	*etiam, précédé par du ſel volatil concret.*
Huile empireumatique	*etiam . . . . .*	*etiam * . . . * & fœtide*	*etiam . . . .*	*etiam & fœtide.*
Acide	o	o	o	o
Huile légère	*un peu . . . . .*	o	*etiam . . . .*	o
Beaucoup d'air . . .	*moins . . . . .*	o	*etiam . . . .*	o
Alkali fixe par l'incinération & la lixiviation	. . . o	*très peu . . .*	o	o

ALKALI VOLATIL CONCRET.

N.B. Je crois inutile de parler des réſidus après toutes les opérations, & je remarquerai ſeulement que (A) n'a de comun avec (B, D) que les n.° 4, 5 (C, E) avec les n.° 1, 2; & que la différence entre (B, D) & (C, E) conſiſte dans les n.° 4, 5; ce qui dépend de ce que les unes ont ſouffert la fermentation putride, & les autres ſont dans l'état ſain. En effet l' (E) donne du ſel volatil avant l'élévation du flegme, d'où il me paroit d'être toujours plus en droit de conclure que l'alkali volatil ne peut être que le produit de n.° 3, 4, & 6 qui, ou ne ſe montrent point ſéparément, ou qui diſparoiſſent dans les matières dont on peut tirer ce ſel.

XXII

Le ſujet que je viens de traiter ſert à nous montrer qu' il en eſt de ceux, dont il n'eſt pas néceſſaire de ſavoir d'avance le réſultat principal, tel que celui qu'on peut maintenant établir avec plus de confiance, ſavoir que l'alkali volatil conſte d'un acide combiné avec une partie de ce qui deviendroit alkali-fixe par l' incinération, & une partie de la ſubſtance inflammable: car cette ſubſtance ſaline n'éxiſtant pas toute formée dans des végétaux ſains, dont on la retire cependant par la putréfaction, ce n'eſt qu'au préjudice de l'acide, de la matière inflammable, & de l'alkali-fixe qu'on peut ſe la procurer; ce qui me paroit démontré.

XXIII

Nous allons faire maintenant une application du même principe de comparaiſon, qui pourra pour ainſi dire nous fournir un moyen pour vérifier des maximes qui auroient été établies ſur des faits, & je me flatte que cette méthode ne ſera pas jugée tout-à-fait inutile. Je prendrai pour exemple un principe aſſez connu, ſavoir que trois parties de rouge combinées avec trois de bleu & deux de jaune fourniſſent une couleur noire dans la peinture en émail; & il eſt queſtion de voir ſi ce principe eſt de même applicable à la teinture; c'eſt ce que nous allons examiner, en ſuppoſant d'avance le fait.

Le noir eſt le réſultat du { *rouge* } . . . . . de ces deux . . *orangé*
{ *jaune* } de ces deux . . . *violet*
{ *bleu* } de ces deux . . . *verd*
{ . . . . . }

XXIV

L'inſpection de cette table préſente d'abord l'idée des ſolutions du problême: car ſi la maxime eſt (3) vraye, on pourra former du *noir*, 1° en combinant trois ſubſtances ſimples dont l'une ſoit *rouge* l'autre *jaune* & la troiſième *bleue*, moyenant qu'on obſerve les proportions qui ſont preſcrittes, & c'eſt là la première ſolution.

XXV

2° On fera du *noir* en mettant une couleur *orangée* avec du *bleu*. La troiſième ſolution nous viendra de la combinaiſon du *verd* avec le *rouge*. La quatrième ſera celle du *violet* avec le *jaune*. Une cinquième enfin naitra de l'aſſemblage de l'*orangé* du *violet* & du *verd*. Je me bornerai à une de ces ſolutions pour ne pas ſurcharger cet eſſai de détails minutieux. Voici donc comment j'ai fait du noir ſur ces principes: j'ai mêlé à une diſſolution de vitriol bleu une quantité à peu-près égale de décoction de noix de galle; le mêlange prit d'abord une couleur rouge orangé; j'y ajoutai de la diſſolution de cuivre faite par l'eſprit volatil, & la liqueur devint peu-à-peu d'un noir trèsfoncé.

XXVI

Tout le monde ſait qu'on ne peut pas former de l'encre avec le vitriol de cuivre & la noix de galle; l'expérience m'avoit enſeigné qu'en mettant de l'acide dans la décoction de noix de galle on obtenoit un rouge orangé; il ne s'agiſſoit donc que d'y développer le bleu ſuivant le 2^d canon de notre analyſe; ce qui ayant été fait par le moyen de l'alkali volatil, il en eſt effectivement réſulté du noir

(3) La maxime eſt certaine dans ce cas, mais je parle comme ſi elle étoit encore problématique, parcequ'il s'agit de l'appliquer à une nouvelle branche de la phyſique.

(4); ſi j'en avois eu le tems, j'aurois de même eſſayé les autres combinaiſons, mais en attendant je ferai obſerver qu'il eſt très-aiſé de reconnoître auſſi dans les encres communes la combinaiſon de ces trois couleurs; car le bleu lui vient du fer, & l'acide dans la décoction de noix de galle change la couleur jaune en rouge orangé, où le rouge cependant domine, lorſque l'acide y eſt en aſſez grande quantité; ce qui eſt très-conforme à la proportion préſcrite.

XXVII

Avant de finir cet eſſai je rendrai compte encore d'une méthode par laquelle il me ſemble qu'on peut parvenir à porter quelque perfection dans les arts, & même à les enrichir de quelques nouvelles branches. Je rapporterai pour plus de briéveté la ſuite de mes idées ſur un objet, ce qui ſervira à faire mieux ſentir ma penſée.

Perſonne n'ignore que l'acide vitriolique a plus d'affinité avec le fer qu'avec le cuivre, ce qui a donné lieu à la prétendue tranſmutation du fer en cuivre en le plon-

(4) Ce mémoire étoit déja ſous la preſſe lorſque je fis cette expérience avec de la teinture d'*indigo*, mêlée avec celle de bois du breſil, & de celle de paſtel ou gaude; en obſervant à peu-près les mêmes proportions j'ai fait une teinture noire, ou qui paroit du moins telle à l'œil en l'examinant ſoit à la ſurface dans un verre, ſoit dans un flaçon, après l'avoir étendue dans beaucoup d'eau. On objectera, peut-être, que de la combinaiſon de ces trois couleurs en teinture il ne ſauroit réſulter un véritable noir ſur les étoffes; mais on me permettra d'obſerver qu'il ſe paſſe une très-grande différence dans la teinture appliquée aux étoffes; que parmi les étoffes mêmes il arrive des différences conſidérables dans l'œil, que prend une même teinture à cauſe du tiſſu, du grain, & de différentes autres petites circonſtances qui cauſent des grandes modifications, & par conſéquent des variétés bien ſenſibles. C'eſt pour cette raiſon auſſi que la meilleure encre pour l'écriture n'eſt d'aucun uſage pour la teinture des étoffes. Cela tient à un principe trop connu des phyſiciens, & dont les données manquent ordinairement à l'artiſte même le plus intélligent. J'ai fait de même une teinture noire avec du violet & des jaunes; mais je dois remarquer que dans toutes ces couleurs on eſt obligé d'augmenter la proportion du bleu.

geant dans des eaux thermales cuivreuſes qui ſe trouvent en Allemagne. La propriété du cuivre de reprendre ſa forme métallique dans cette opération, & en même tems l'art de Damaſquiner s'étant préſentées à mon eſprit, j'ay imaginé qu'on pourroit très-bien tirer quelque parti de la théorie des affinités pour créér un nouvel art, ſi on ne veut pas le regarder, ſeulement, comme une nouvelle branche ajoutée à l'art de damaſquiner.

Dans le cas particulier du fer, & du cuivre, il ſuffit de plonger dans de la cire de graveur la pièce de fer dont on découvrira enſuite par le deſſein les parties qui doivent paroître en cuivre, on paſſera après la pièce ainſi préparée dans une diſſolution de vitriol de cuivre, & même on l'y retiendra autant de temps qu' il en faut, pour que l' acide vitriolique, diſſolvant une plus grande quantité de fer, puiſſe être remplacé par une couche plus forte de parties cuivreuſes, ſur leſquelles il faudra avoir la précaution de paſſer le burin, d'ou il réſultera plus d'éclat, & une plus grande ſolidité dans le damaſquinage en queſtion.

Mais pour prendre la choſe plus généralement encore, il ſuffira de remplir les conditions ſuivantes, ſavoir: que le méral de la pièce qu'on deſtine à être damaſquinée ait une plus grande affinité avec le menſtrue, que n'en a celui qui y eſt en diſſolution, & qui eſt deſtiné au damaſquinage. Une autre condition ſeroit celle que le précipité reparut ſous ſa forme métallique, mais j'ai lieu de croire qu'on pourroit y ſuppléer en ſouſpoudrant toute la pièce de charbon ou de quelque autre matière inflammable qui put revivifier cette chaux par ſon phlogiſtique en la paſſant ſur le feu, s'il le faut.

Cette idée, quelque imparfaite qu'elle ſoit, pourroit bien un jour être rectifiée & être portée plus loin par le ſecours de la doctrine des affinités compoſées. J'eſpère d'être com-

pris par les gens de l'art ; & ce ſera une nouvelle obligation que nous aurons aux lumiéres que l' Illuſtre Monſieur Macquer a répandu ſur cette partie ſi controverſe, ſi abſtraite, & ſi intéreſſante de la chymie.

CORRECTIONS POUR LA PARTIE PHILOSOPHIQUE

Dans le mémoire de M.r le Comte Mouroux.

	Fautes.	*Corrigez.*
Pag. 17 *l.* 23.	que on traite	dont on traite
19 *l.* 16.	il eſt choſe	c' eſt une choſe
24 *l.* 19.	ne la viſite	ne les viſite
25 *l.* 2.	exoſé	expoſé
l. 3	que pour	que par
l. 18.	extremment froid comme en Moſcovie, en Pologne	extremement froid comme en Moſcovie,& en Pologne
27 *l.* 25.	écloſes,	écloſes;
30 *l.* 23.	à l' obſcur	dans l' obſcurité
48 *l.* 17.	particulierement	particulierement (12
Note(13) 49 *l.* 11.	metallium	metallicum
l. 12.	fixmm	fixum
l. 15.	vivide	viride
l. 15.	urtione	uſtione
l. 17.	vividem	viridem
Note(14) 50 *l.* 14.	d'accord l'éſpece	d'acord ſur l'éſpece
l. 16.	de Chevalier Linné	du Chevalier Linné
Note(16) 51 *l.* 2.	inturſuſception	intuſſuſception

In Caroli Allionii auctario ſtirpium horti Regii Taurinenſis.

	Errata.	*Corrige.*
Pag. 55. *l.* 22.	moluceae	moluccae
58. *l.* 29.	rambrum	ramoſum
61. *l.* 1.	ſeſamum indicum	*transferendum* ſub Ruellia
69. *l.* 4.	Siegerbekia	Siegesbeckia
l. 6.	macrophylla l	macrophylla l*.
71. *l.* 31.	e	ex

	Errata.	*Corrige.*
Pag. 73. *l.* 7.	Succica	Svecica
74. *l.* 26	didym.m	bonarienſe
76. *l.* 17.	Argeinene	Argemone
l. 13.14	melitotus	melilotus
l. 24.	melitotus	melilotus
79. *l.* 2.	juncea L	juncea L *
l. 4.	valentina L	valentina L *
84. *l.* 11.	pulcrum	pulchrum
89. *l.* 26.	treliantathemum	helianthemum
91. *l.* 21.	chamaemelins	chamaemelii
92. Conſule numeros 133.134.		
94. *l.* 27.	diſtiactum	diſtinctum
96.	polymorphia	polymorpha

In diſſertationem JOHANNIS FRANCISCI CIGNA *de reſpiratione*, ob auctoris tunc graviter aegrotantis abſentiam multa irrepſerunt menda, quae ſic corrigenda.

Pag. 112. *l.* 1.	variores	*lege*	rariores
113. *l.* 8.	variori		rariori
l. 15.	DAUSTENE		DAOUSTENC
114. *l.pen.*	puth. funic		pathol. funic.
115. *l.* 3.	alii		*dele*
l. 6.	deductum		deductam
116. *l.* 33.	tepidum		tepidam
117. *l* 13.	circuli		corculi
l. 30.	poſtquum		poſtquam
118. *l.* 7.	Attenta		; attenta
l. 8.	analogum ipſis		analogum in ipſis
l. 26.	ipſum auriculam		ipſam auriculam
119. *l.* 2.	non neque		non aeque
l. 10.	vivaparis		viviparis

	Errata.	*Corrige.*
Pag. 120.	*l.* 17. quum moleſtiam	eam moleſtiam
	l. 25. refrigeria	refrigerio
	ib. illum autem	illud autem
	l. 33. ad partem ſtimulet	ad partum ſtimulet
	l. 35. ad ſurgendum	ad ſugendam
121.	*l.* 26. quae neque	quae aeque
124.	*l.* 13. oſtium	otium
	l. 29. 30. Totus textus curſivo charactere erat exprimendus	
125.	*l. ult. nota* v memorata	*nota* y memorata
129.	*l.* 5. (III)	(XXIV) Citationes nempe omnes numerorum hujus & ſequentis capitis mendoſae ſunt, quod ordo numerorum, qui in ſingulis capitibus ab unitate incipere debuiſſet, continuata ſerie productus ſit a principio ad finem.
130.	*l.* 18. queunt	queant
131.	*l.* 9. in animalibus, qui	in animalibus, quae
132.	l. 6. neque incerta	aeque incerta
	l. 23. *not.* b	*not.* f
133.	ultima linea hujus paginae in principium ſequentis notae transferenda	
134.	*l.* 32. reſpiratio ſenſibilis	reſpiratio inſenſibilis
135.	*l.* 21. ea majori	eo majori
137.	*l.* 15. Ut animalia	At animalia
	l. 29. Rigmannus	Richmannus
141.	*l.* 5. Exitingues	Exitinguens

	Errata.	*Corrige.*
Pag. 143.	*l.* 20. conditum eſſe	pulmonem conditum eſſe
	l. 30. camaleon	chamaeleo
144,	*l.* 29. ſuperficia	ſuperficiei
	l. 48. imo & progreſſivum (ρ) inteſtinum motum	inteſtinum motum imo & progreſſivum (ρ)
146.	*l.* 12. fit	fiet
	l. 15. rariorem aerem	in rariorem aerem
	l. 19. (IX)	9.°
147.	*l.ult. not.* d	*not.* l
149.	*l.* 21. aeream	veram
150.	*l.* 31. Avagius	Savagius
151.	*l.* 9. hanc quoque	huic quoque
154.	*l.* 7. eumdem majores	eamdem mnjores
156.	*l.* 8. potius quum	potius quam
157.	*l.* 10. 11. aut favere non obſtare	aut favere, aut obſtare
	l. 11. 12. aut tam praeſentiae	non tam praeſentiae
	l. 24. aër en maſſe	air en maſſe
	l. 25. renovare cenſet	renovari cenſet.
	l. pen. obſervatur coagulari	*obſervatur coagulari*
159.	*l.* 2. ac ſi ulla	ac ſi nulla
	l. 3. opprimerentur	apprimerentur

Ad D. Dana. *De ſolano melanoceraſo.*

170.	omne	omnes
171.	*not.* 1. pertinet ad paginam praecedentem	
	not. 2. Miſcel. Taur. &c. legenda poſt verba *Bot. Prof.*	
177.	*l.* 2. Poſt alias ad . . . adde	Serviceum opus vulgo dictum

MEMOIRE

Sur differentes queſtions d'Analyſe.

PAR M. LE MARQUIS DE CONDORCET.

ARTICLE I

Réflexions ſur la forme des racines des équations déterminées, la réduction & la ſolution de ces équations.

Cardan & ſes diſciples ont réſolu les équations des 3.e, & 4.e dégrés. Les Algébriſtes qui leur ont ſuccédé, ont perfectionné leurs ſolutions, en dévélopant la forme & la nature des racines. Ils ont donné une Théorie profonde ſur la formation des équations des tous les dégrés & ſur les racines imaginaires; mais malgré les travaux de tant des grands Géométres, l'équation du 5.e dégre eſt encore à réſoudre, & a réſiſté à leurs efforts. M. Euler qui s'eſt exercé avec tant de ſuccès ſur toutes les queſtions de l'Analyſe, s'eſt occupé de celle-ci, & y a rapellé l'attention des Géométres qui paroiſſoient l'avoir tournée ſur d'autres objets. M. Bézout, M. Waring, M. le Chevalier de Marguerie, M. de la Grange, M. de Vandermonde ont donné ſur cette matière des récherches intéreſſantes & très-propres à jetter une nouvelle lumière ſur cette théorie fondamentale de l'Analyſe. C'eſt à la lecture de leurs ouvrages que je dois les réflexions ſuivantes qui peut-être ne ſeront pas abſolument inutiles à ceux qui ſe propoſeroient de ſuivre la même carrière.

I

La solution d'une équation du 3.e dégré, se réduit à une équation du second, celle du quatrième à une équation du sixième, immédiatement réductible au troisième. M. Bézout a prouvé que l'équation du cinquième se réduisoit à une du 24.e mais le rabaissement de celle-ci à des équations du 4.e, du 3.e, & du 2.e ne se présente pas immédiatement; il faut de longs calculs pour y parvenir, & c'est le principal obstacle qui a rétardé jusqu'ici la solution de ces équations.

II

Les racines d'une équation doivent être des fonctions algébriques & entières des coëfficiens de cette équation, & si le dégré est n en général, elles ne peuvent contenir de radicaux d'un dégré plus élevé que $\sqrt[n]{\ }$. Supposons donc que nous ayons une équation du dégré n, où le second terme manque, & faisons

$$x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C}; \ldots\ldots$$

le nombre de ces radicaux étant $n - 1$, il est clair que si je fais disparoître les radicaux de cette équation *hypothétique*, & qu'ensuite je mette au lieu de x^n sa valeur tirée de la proposée, il me restera une fonction où x ne montera qu'à la $\overline{n-2}$.e puissance; ce qui me donnera $n - 1$ équations pour déterminer les $n - 1$ quantités A, B, C, &c. On voit que les conditions de cette opération sont que l'équation proposée & l'équation hypothétique aient lieu en même temps & *pour toutes les racines*. On voit aussi que pour faire disparoître les radicaux de

l'équation $x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B}$, &c. on en aura une où x montera au dégrè n^{n-1}, & c'eſt ce qui doit arriver, puiſqu'à cauſe des n racines de l'équation $y^n - 1 = 0$, chaque $\sqrt[n]{A}$ ou $\sqrt[n]{B}$, &c. a n valeurs qui peuvent être combinées avec les n valeurs de chaque autre, & que les radicaux ſont au nombre de $n - 1$.

III.

L'équation en A ne pouvant contenir de radicaux, ni du dégré n, ni des dégrés ſupérieurs, ſera néceſſairement du dégré . . . . $m.n-1.n-2.n-3 \ldots 1$; m étant le produit des nombres plus petits que n ; & comme la quantité que nous appellons A, répond à une quantité qui, en ſuivant la méthode de Tſchirnaus eſt donnée par une équation du dégré $n-1.n-2.n-3 \ldots 1$. L'equation en A ſera réductible à une équation du dégré $n-1.n-2.n-3 \ldots 1$; en ſorte que ſi on avoit $m = m'.p'.q' \ldots$ on auroit, en réſolvant ſucceſſivement des équations des dégrés m', p', q', ou $m'p'$, $m'q'$ &c. $m'p'q'$ &c. (ſi ces produits ſont moindres que n) on auroit, dis-je, une équation définitive du dégré $n.-1.n-2 \ldots 1$. Toutes les fois que $n > 3$, cette équation monte donc à un dégré plus élevé que n ; & c'eſt ce qui a rendu ſi difficile la ſolution des équations des dégrés ſupérieurs.

On voit déja que pour réſoudre l'équation produite par l'équation hypothétique . . . $x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B}$, &c. il y a deux moyens à employer ; 1.° la réduction de cette équation ; 2.° une nouvelle équation hypothétique. Suppoſons d'abord que l'équation en x du $n-1$, $n-2 \ldots 1$ dégré, ne ſoit

ſuſceptible d'aucune réduction ; il eſt clair que ſi on la traité comme la propoſée, qu'on faſſe $x' = \sqrt[1.2.3...n-1]{A} + \sqrt[1.2.3...n-1]{B} + \ldots$ - le nombre des radicaux étant $n-1 \cdot n-2 \ldots 2 \cdot 1 - 1$, on aura une équation pour A'. Mais comme les racines de l'équation en x' ne doivent pas contenir de radicaux plus élevés que $\sqrt[n-1]{}$, on voit que l'équation en A', montera ou ſera réductible à un dégré qui n'aura point de diviſeurs premiers plus grands que $n-2$. En répétant la même opération, & réduiſant toujours ces équations autant qu'elles peuvent l'être, on en aura une d'un dégré qui n'aura point de diviſeurs premiers plus grands que $n-3$ & ainſi de ſuite juſqu'à une équation rationnelle.

IV

Ces ſuppoſitions pour les équations hypothétiques, ſont ſans doute trop compliquées ; ainſi il faudra, au lieu de cela, faire ſeulement $x' = \sqrt[n-1]{A'} + \sqrt[n-1]{B'} \ldots + Q'$, le nombre des A', B' étant $n-2$; & on examinera ſi l'équation en A', ou en Q' devient, après être réduite, d'un dégré qui n'ait pas de diviſeurs premiers plus grands que $n-2$. Si cela a lieu, on verra ſi en faiſant dans cette équation réduite dont l'inconnue eſt x'' ; $x'' = \sqrt[n-2]{A''} + \sqrt[n-2]{B''} \ldots + Q''$, le nombre des radicaux étant $n-3$, & ainſi de ſuite on aura ſucceſſivement des équations dont le dégré n'ait que des facteurs premiers plus petits que $n-3$, $n-4$ &c., & ainſi de ſuite. Nous obſerverons encore que

ſi l'équation réduite en x'' eſt d'un dégré produit par des facteurs premiers plus petits que $n - 1$, & que quelqu'un de ces facteurs ſoit répété plus d'une fois & ſoit en même temps facteur de $n - 1$, il faudra eſſayer auſſi une équation hypothétique

$$x'' = \sqrt[n']{A'} = \sqrt[n'']{B'} \ldots\ldots + Q''$$

où n' eſt ce facteur, & où le nombre des A'' &c. eſt $n - 1$.

V

Pour ſavoir ſi une équation eſt ſuſceptible de réduction, on prendra tous les diviſeurs, tant ſimples, que compoſés de l'expoſant du dégré de l'équation; & ſoit m un de ces diviſeurs, mm' le dégré de l'équation & x l'inconnue, ou cherchera ſi on ne peut pas avoir.

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} \ldots + p = 0,$$

les a, b, &c. étant donnés par des equations du dégré m'.

D'abord on eſſayera les diviſeurs ſimples, & enſuite on verra ſi on a des diviſeurs compoſés qui réuſſiſſent ſans qu'aucun diviſeur ſimple ait reuſſi. Il ſera queſtion de réſoudre d'abord l'équation m; or dans ce cas quand même $m > n$, il eſt clair que m eſt le produit des diviſeurs premiers plus petits que n; que l'équation $x^m + ax^{m-1} \ldots + p = 0$, ne peut avoir dans ſa racine de radicaux auſſi élévés que n, & qu'ainſi on la réſolvera en prenant des équations hypothétiques comme ci-deſſus.

Il eſt inutile d'avertir que l'on n'a pas beſoin d'avoir réſolu l'équation en m ou m' pour ſavoir ſi la propoſée du dégré $m\,m'$ eſt réductible ou non.

V I

On peut régarder la méthode ci-deſſus comme générale; en effet il eſt certain que la racine d'une équation du

dégré n ne peut contenir, ſous le radical n, que des fonctions de radicaux moins élévées: or quelles que ſoient ces fonctions, il eſt clair que les équations hypothétiques ci deſſus ſerviront à faire diſparoître à chaque fois le radical ſous qui tous les autres ſe trouvent, & ainſi de ſuite, juſqu'à ce qu'on ait une équation qui ait un diviſeur rationnel. Ainſi l'on voit que la méthode employée pour réſoudre les 3.^{e}, 4.^{e} dégré, peut s'étendre aux dégrés ſupérieurs, & que la difficulté qui nait de l'élévation de l'équation où conduit l'hypothèſe pour la forme des racines, ne tient qu'à l'enorme complication des calculs qu'exige alors la ſolution du probléme; mais qu'on parviendra toujours à la ſolution cherchée en employant ſucceſſivement les réductions, & les équations hypothétiques, quand il n'y a plus de réductions poſſibles.

VII

Les équations que produiſent les différentes hypothèſes qu'on peut faire pour avoir les racines d'une propoſée, ne peuvent contenir dans leurs racines que les mêmes radicaux, mais combinés différemment avec des coëfficiens numériques, qui ſeront en général les racines d'équations $y^n - 1 = 0$, $y^m - A = 0$, A étant un nombre, $m < n$, ou d'équations produites par la multiplication de celles ci. On pourra donc abréger conſidérablement le calcul, en ne cherchant, ſoit pour la réduction des équations, ſoit pour les réſultats où conduiſent les équations hypothétiques que des fonctions rationnelles, par raport aux coëfficiens indeterminés de la propoſée, ſans s'embaraſſer des coëfficiens numériques. Si on joint à cela une remarque qu'on doit à M. le Chevalier de Marguerie, que ſi on a une équation $x^n + a x^{n-1} + b^2 x^{n-2} \ldots + q^n = 0$, les racines ſeront des fonctions homogenes & du dégré 1 de ces.

coëfficiens ; & que par ce moyen on ſache par le ſeul dégré de chaque équation de quels termes de ces coëfficiens chacun des ſiens peut-être compoſé : l'examen des équations qu'on cherche à réduire, ou pour leſquels on cherche des équations hypothétiques, en deviendra bien moins long.

VIII

J'ai dit ci-deſſus que les coëfficiens numériques dépendroient d'équations $y^n - 1 = 0$, $y^m - A = 0$, ou de leurs combinaiſons ; mais quand cela n'auroit pas lieu en général, la recherche de ces coëfficiens n'auroit aucune difficulté analytique. En effet, ſi l'on connoît une fois les fonctions des coëfficiens indéterminés d'une équation du dégré n qui entrent dans ſa racine, ainſi que toutes les équations qui ont ſervi à déterminer ces fonctions ; comme les nombres inconnus reſtent conſtans, quelles que ſoient les racines, il y aura toujours moyen de les avoir par la méthode des coëfficiens indeterminés.

ARTICLE II

Démonſtration d'un Theorème de M. de la Grange (mémoires de l'Académie de Berlin, tome 24.^e)

Soit l'équation

$$y - x + \varphi x = 0 ;$$

φx déſignant une fonction quelconque de x, & que je cherche une valeur de ψx, autre fonction de x en y ; j'aurai par le théorème de M. d'Alembert,

$$\psi x = \psi y + \frac{d\psi y}{dy} \varphi x + \frac{d^2 \psi y}{2 d y^2} \varphi x^2 + \text{&c.}$$

par le même théorème

$$\varphi x = \varphi y + \frac{d\varphi y}{dy}\varphi x + \frac{d^2\varphi y}{2dy^2}\varphi x^2 + \&c.$$

donc faiſant $\varphi x = \varphi y + B$, $B = \frac{d\varphi y}{dy}\varphi y + C$, & ainſi de ſuite : j'ai en ordonnant par raport aux puiſſances de φy & de ſes différences,

$$\varphi x = \varphi y + \frac{d\overline{\varphi y}^2}{2dy} + \frac{d^2\overline{\varphi y}^3}{2.3.dy^2} + \&c.$$

$$\frac{\varphi x^2}{2} = \frac{\varphi y^2}{2} + \frac{2d\overline{\varphi y}^3}{2.3.dy} + \frac{3d^2\overline{\varphi y}^4}{2.3.4dy^2} + \&c.$$

$$\frac{\varphi x^3}{2.3} + \frac{\varphi y^3}{2.3} + \frac{3d\varphi y^4}{2.3.4dy} + \frac{6d^2\varphi y^5}{2.3.4.5.dy^2} \&c.$$

ſubſtituant donc ces valeurs dans celle de ψx, ou aura, en ordonnant par raport aux puiſſances de ψy, & φy & de leurs différences,

$$\psi x = \psi y + \varphi y\frac{d\downarrow y}{dy} + \frac{\varphi y^2 d^2\downarrow y}{2dy^2} + \frac{\varphi y^3}{2.3}\frac{d^3\downarrow y}{dy^3} \quad \&c.$$
$$+ \varphi y\frac{d\varphi y}{dy}\frac{d\downarrow y}{dy} + \frac{2.d.\varphi y^3}{2.3\,dy}\frac{d^2\downarrow y}{dy^2}$$
$$+ \frac{d^2\varphi y^3}{2.3\,dy^2}\frac{d\downarrow y}{dy}$$

& réduiſant

$$\psi x = \psi y + \varphi y\frac{d\downarrow y}{dy} + \frac{d\varphi y^2\frac{d\downarrow y}{dy}}{2dy} + \frac{d^2\varphi y^3\frac{d\downarrow y}{dy}}{2.3\,dy^2} \quad \&c.$$

formule dont la loi eſt facile à ſaiſir.

AR-

ARTICLE III.

Sur une équation aux différences finies.

Soit $z = AFx + ay + BF'x + by + CF''x + cy + DF'''x + ey$ &c. l'intégrale d'une équation aux différences partielles où les F désignent des fonctions arbitraires & où A, B, C, D, &c. sont des fonctions de y. Je suppose que lorsque $z = f$, $y = f'$: que lorsque $z = g$, $y = g'$; que lorsque $z = h$, $y = h'$; que lorsque $z = l$, $y = l'$, & ainsi de suite. On aura donc pour déterminer les fonctions, les équations.

$$f - AF\overline{x + af'} - BF'\overline{x + bf'} - CF''\overline{x + cf'} - DF'''\overline{x + ef'} \pm \&c = 0$$

$$h - A'F\overline{x + ah'} - B'F'\overline{x + bh'} - C'F''\overline{x + ch'} - D'F'''\overline{x + eh'} \pm \&c = 0$$

$$g - A''F\overline{x + ag'} - B''F'\overline{x + bg'} - C''F''\overline{x + cg'} - D''F'''\overline{x + eg'} \pm \&c = 0$$

$$l - A'''F\overline{x + al'} - B'''F'\overline{x + bl'} - C'''F''\overline{x + cl'} D'''F'''\overline{x + el'} \pm \&c = 0$$

& ainsi de suite ; les AA' & BB' &c. étant ce que deviennent les coëfficiens en y, lorsque y est égal à f', ou g', ou l'.

Maintenant pour avoir chaque fonction arbitraire, on mettra dans toutes les équations, hors la première, au lieu de x, $x + p$, $x + q$, $x + r$, &c., & on déterminera p, q, r par la condition que $af' = p + ah' = q + ag' = r + al'$, & ainsi de suite. Par ce moyen, si le nombre des fonctions est n, on aura après avoir éliminé F, $n - 1$ équations qui contiendront chacune deux fonctions de la forme Fx, $Fx + P$ pour la première équation, Fx, $Fx + P'$ pour la seconde, Fx, $Fx + P''$ pour la troisième, & ainsi de suite avec deux fonctions F'', deux fonctions F''', &c. Je prends les deux premières équations, & j'ai, en mettant dans la première $x + P'$ au

lieu de x, & dans la seconde $x + P$ au lieu de x, quatre équations qui contiennent $F'x$, $Fx + P$, $F'x + P'$, $F'x + P + P'$; donc je puis éliminer $F'x$: j'aurai maintenant $n-2$ équations qui contiendront chacune $F''x$, & quatre fonctions semblables de x, plus quatre constantes différentes, & de même $F'''x + Q$ & quatre autres fonctions semblables de x, plus quatre constantes différentes; On éliminera F'' par une méthode semblable, & ainsi de suite; en effet quelque soit le nombre des fonctions F^n, pourvu qu'on ait deux équations, on parviendra toujours à éliminer, parce que lorsqu'on aura chassé une de ces fonctions $F^n x + Q$; par exemple, on n'aura qu'à mettre $x + Q$ au lieu de x dans l'équation d'où on a chassé $F^n x + Q$, on aura une équation contenant $F^n x + Q$, $F^n x + Q + Q'$, $F^n x + Q + Q''$, &c., & mettant dans celle-ci pour $F^n x + Q$ sa valeur tirée d'une des deux proposées, on aura une équation en $F^n x + Q'$, $F^n x + Q''$, $F^n x + Q' + Q''$, $F^n x + 2Q'$, $F^n x + 2Q''$, &c. donc on aura deux équations qui ne contiendront plus $F^n x + Q$, on chassera de même $F^n x + Q'$, & $F^n x + 2Q'$, & ainsi de suite. Cela posé, soit une équation définitive de la forme $A, Fx + B, Fx + \Delta^{I} + C Fx + \Delta^{II} + D, Fx + \Delta^{III}$ au nombre de m, & qu'on fasse $Fx = Ne^{fx}$, on aura l'équation.

$$A, + B, e^{f\Delta^{I}} + C e^{f\Delta^{II}} + D e^{f\Delta^{III}} \&c. = 0;$$

& il est clair que l'on aura Fx égal à une série d'autant de termes en Ne^{fx}, que f peut avoir de valeurs.

Examinant cette équation, on voit que si les Δ sont tous commensurables entr'eux, l'équation est comme celles aux différences finies ordinaires; mais si les Δ ne sont pas commensurables, alors on observera 1.° que si m est le nombre des fonctions, il pourra arriver que f ait $m-1$ valeurs réelles. En effet, supposant à $fm-1$ valeurs réel-

les à volonté, & ſubſtituant, on aura les A, B, C, &c. en f; ou peut de même avoir $f = \pm f' \sqrt{-1}$ tant de fois que $\frac{m-1}{2}$ contient d'unités. En effet, en mettant les imaginaires ſous la forme $a + b\sqrt{-1}$, la première ſuppoſition donne $A + B\sqrt{-1} = 0$; la ſeconde $A - B\sqrt{-1} = 0$; ce qui ne fait que deux conditions A & $B = 0$. comme c'eſt réellement e^f qui entre dans l'équation ci-deſſus, C étant la valeur de e^f, on aura d'autres valeurs de f en auſſi grand nombre que $e^f - C = 0$ a de racines, c'eſt-à-dire, un nombre infini. Mais il ne ſuit pas de là qu'il y ait ici un nombre infini de termes correſpondans à chaque valeur de e^f. En effet, la ſuite de toutes ces valeurs de f, eſt f, $f + \gamma$, $f + \gamma^{I}$, $f + \gamma^{II}$, &c. γ, γ^{I} γ^{II}, &c. étant des quantités telles que $e^{\gamma} = e^{\gamma^{I}} \ldots = 1$; mais dans le cas de l'équation préſente, en mettant ces valeurs pour f, ou auroit A, $+ B\, e^{f\Delta}\, e^{\gamma\Delta} + C\, e^{f\Delta I}\, e^{\gamma\Delta I}$, &c. $= 0$, équation qui doit avoir lieu en même temps que A, $+ B\, e^{f\Delta} + C\, e^{f\Delta I}$ &c. ce qui demande que $e^{\gamma\Delta} + e^{\gamma\Delta I}$ ſoient égaux à l'unité. Or quoique $e^{\gamma} = 1$, quelque valeurs de γ qu'on eût priſe, cependant lorſque Δ, ΔI ne ſont pas des nombres entiers, $\gamma = 0$ eſt la ſeule des valeurs de γ, pour laquelle $e^{\gamma\Delta}$ ſoit égal à l'unité; or, ici, les quantités Δ, Δ^{I} étant incommenſurables entr'elles, on voit que $\gamma = 0$ eſt la ſeule valeur qui convienne au problême.

ADDITION AU MEMOIRE

Sur les ſolutions particulières des équations différentielles.

PAR M. LE MARQUIS DE CONDORCET.

M. Euler a remarqué le premier qu'il y avoit des équations qui ſatisfaiſaient à une équation différentielle ſans cependant être compriſes dans ſon intégrale générale. Voici quelques refléxions ſur la cauſe de ce paradoxe, c'eſt ainſi que M. Euler l'a apellé.

1 Soit $A\,dZ + BZ^m = 0$ une équation différentielle, il eſt clair que $Z = 0$ y ſatisfera, mais l'équation ſous cette forme eſt égale à la différentielle exacte de l'intégrale multipliée par un facteur, donc il peut arriver que $Z = 0$ ſatisfaſſe à la propoſée ſans ſatisfaire à la différentielle exacte de ſon intégrale, il ſuffit pour cela qu'elle ſatisfaſſe au facteur, & que Z y ſoit à une puiſſance poſitive plus grande que la plus petite puiſſance de Z dans le dénominateur de la différentielle exacte.

2 Une équation intégrale étant ſuppoſée $Q + C = 0$ ou C eſt une conſtante arbitraire les équations, qui rendent $Q = 0$, ou $Q = \infty$ ſatisfont également à $Q + C = 0$ les unes répondant à l'hypothéſe de $C = 0$ & les autres à celle de $C = -\infty$ donc pour que la ſolution $Z = 0$ ſatisfaſſe à la propoſée ſans ſatisfaire à l'intégrale, il faut que non ſeulement elle multiplie le facteur ſans ſatisfaire à la différentielle exacte, mais qu'elle ne puiſſe pas rendre l'intégrale infinie.

3 Soit $\frac{Z^n}{V}$ le facteur, l'intégrale ſera $SAVZ^{-n}\,dZ + BZ^{m-n}$ & elle eſt égale à $SAVZ^{-n}\,dZ$ priſe en

regardant Z seulement come variable plus au terme indépendant de Z il faudra donc ici que $SAV Z^{-n} dZ$ prise par rapport à Z ne soit point infini lorsque $Z = o$ donc (come M. Euler l'a enseigné dans le chapitre de son calcul intégral ou il traite de ces solutions particulières) il faut que n soit entre o & l'unité, mais il faut aussi que $B Z^{m-n}$ ait un terme sans Z sans quoi Z se trouveroit à tous les termes de l'intégrale, ce qui est contre l'hypothése donc $m = n$ donc m est entre zero & l'unité.

4 Donc si on a une équation différentielle d'un ordre quelconque elle ne pourra avoir des solutions particulières non compriſes dans l'intégrale, à moins qu'elle ne renferme des radicaux $\sqrt[n]{Z}^{*}$, & que ces radicaux ne s'y trouvent pas multipliés à tous les termes par des puiſſances de Z, & les radicaux qui feront dans le cas & qui réſolveront la propoſée doneront les ſolutions particulières.

5 Soit l'équation $A dZ + \overline{B dx + C dy} Z^m = o$ à laquelle $Z = o$ ſatisfait & que cette équation n'ait pas d'intégrale générale, il eſt clair que toutes les fois que m n'eſt pas entre zero & l'unité $Z = o$ ſatisfait à l'équation de condition connue pour l'intégrabilité de ces équations, & que lorſque m eſt entre zero & l'unité $Z = o$ n'y ſatisfait pas; donc on pourra avoir dans ce cas pour ſolutions particulières de la propoſée non ſeulement l'équation de condition, mais encore les quantités qui ſe trouveront dans la propoſée ſous le ſigne radical avec la même condition que ci-deſſus, & il ſera facile d'appliquer le même raiſonement aux équations de tous les ordres pour leſquelles j'ai donné les équations de condition.

6 M. Euler a remarqué dans les mémoires de Peterſbourg où il recherche la courbe que décrit un point attiré par deux centres fixes que ces ſolutions particulières

non compriſes dans l'équation générale ne pouvaient être emploïées à la ſolution des problêmes. Ainſi lorſque l'on a ſu par des ſubſtitutions ou autrement qu'une certaine équation ſatisfait à une équation différentielle, il faut avant de l'employer, examiner ſi elle n'eſt pas dans le cas de nos ſolutions particulières ($C \cdot a\, d$), ſi la fonction égalée à zero dans cette équation ne ſe trouve pas dans la propoſée ſous le ſigne radical avec la condition ci-deſſus.

7 La cauſe de ce nouveau paradoxe remarqué encore par M. Euler ſe peut découvrir en éxaminant la maniére dont pour chaque problême on parvient à une équation différentielle ; en effet on verra qu'elles ſont formées par la comparaiſon des valeurs ſucceſſives des y, des x, & en ſorte que ſi au lieu de $y + dy$ on mettait y, & x au lieu de $x + dx$ elles doivent démeurer identiques, or il eſt aiſé de voir que ſi dans $A\,dZ + \sqrt{Z}\,B = A\,\overline{Z + dZ} - A\,Z + \sqrt{Z}\,B$ on met Z au lieu de $Z + dZ$ elle ne devient pas identique.

8 On voit que dans le cas de $A\,dZ + B\,Z = o$ la même ſubſtitution ne rend pas la propoſée identique, auſſi $Z = o$ n'eſt pas même dans ce cas une véritable ſolution de la propoſée, elle ne peut l'être que dans le cas particulier où elle ſe trouve être la même que ce que devient alors la ſolution générale. En effet ſoit une équation $a\,y + b\,x^2 - b\,c^2 = o$, a étant arbitraire, on ne peut pas dire que l'équation $x = C$ ſoit une ſolution de cette équation, puiſqu'il y a une infinité de cas ou elle ne reſout pas, & ſi on avoit eu l'équation $\frac{d\ b\,x^2 + b\,c^2}{y} = o$ on n'aurait pas pu dire que $x = b$ reſout le problême qui a conduit à cette équation par ce qu'il y a une infinité de cas du problême qu'elle ne peut réſoudre. Ainſi les ſolutions contenues dans l'intégrale reſolvent non pas le problême

propoſé, mais quelques cas de ce problême, & les autres ſolutions de l'équation différentielle non contenues dans l'intégrale n'en réſolvent aucun.

10 Dans le cas des équations abſurdes on trouvera que ſi (ces équations étant entre x, y & z) on cherche les valeurs de z repondant à $y = X$, X eſt une fonction de x. Les ſolutions de la propoſée contenues dans l'équation de condition deviendront en y mettant X pour y des ſolutions contenues dans l'intégrale de l'équation en z & x. Au lieu que celles qui ne ſeront pas contenues dans l'équation de condition ne donneront pas non plus de ſolutions contenues dans l'intégrale de l'équation en z & x.

Je ne me ſuis point étendû ſur ce ſujet par ce que je ſçai que M. de la Place de l'Académie des Sciences de Paris en a fait l'objet d'un travail conſidérable, ſon ouvrage qu'il a eû la bonté de me communiquer en manuſcrit, il y a plus d'un an, ſera imprimé dans les mémoires de l'Académie des Sciences de Paris pour l'année 1773.

MÉMOIRE

Sur la détermination des fonctions arbitraires dans les intégrales de quelques équations aux différences partielles.

PAR M.r MONGE.

L'intégrale d'une équation aux différences ordinaires doit, comme on sait, renfermer, pour être complete, autant de coſtantes arbitraires que le dégré de la différentielle contenoit d'unités avant l'intégration, & ces conſtantes doivent être telles que l'intégrale ſatisfaſſe à autant de conditions particulières, qui ſont ordinairement que pour certaines valeurs données de x, certaines fonctions de x deviennent égales à des quantités données; & en ſuppoſant la perfection de l'analyſe, la détermination de ces conſtantes n'eſt ſoumiſe à aucune difficulté. De même l'intégrale complete d'une équation aux différences partielles renferme autant de fonctions arbitraires des variables déterminées que le dégré de la différentielle contenoit d'unités, & ces fonctions doivent être de telle forme que l'intégrale ſatisfaſſe à un même nombre de conditions particulieres, qui ſont toujours que, pour certaines équations données entre x & y, l'intégrale ſe transforme en d'autres équations données entre x & z.

Par exemple, z étant une quantité fonction de x & de y, δ le caractère de ſa différentielle en ne feſant varier que x & d celui de ſa différentielle par raport à y, l'intégrale $z = \varphi(ax - y)$ de l'équation $\frac{\delta z}{dx} + a\frac{dz}{dy} = 0$, appartient à autant de ſurfaces courbes diſtinctes, & dans cha-

chacune des quelles on aura également $\frac{\delta z}{dy} + a\frac{dz}{dy} = o$, que φ, peut avoir de formes différentes, & si l'on veut avoir l'équation de celle de ces surfaces qui passe par une courbe à double courbure donnée, il faut déterminer quelle forme doit avoir la fonction φ pour qu'en fesant $y = \Delta . x$, on ait $z = \psi . x$: ces deux dernières équations étant celles des projections de la courbe donnée sur deux des plans aux quels est rapportée l'équation de la surface.

Pareillement $z = \varphi(ax - y) + x\varphi'(ax - y)$, intégrale de $\frac{\delta\delta z}{dx^2} + \frac{2a\delta dz}{dxdy} + \frac{a^2 ddz}{dy^2} = o$ est l'équation d'autant de surfaces différentes qu'il y a d'unités dans le nombre des combinaisons deux à deux dont sont susceptibles toutes les formes que peuvent avoir les fonctions q & φ'; & l'on ne peut indiquer une de ces surfaces qu'en assignant, par exemple, deux courbes à double courbure par lesquelles elle doive passer : ou plus généralement, qu'en donnant deux conditions distinctes aux quelles il faille que l'équation satisfasse en même tems. Il en est de même des équations qui contiennent un plus grand nombre de fonctions arbitraires.

De plus il arrive souvent, surtout lorsque les fonctions arbitraires sont affectées de facteurs, que la détermination des formes des fonctions introduise dans l'intégrale des constantes arbitraires que l'on ne peut déterminer qu'en connoissant les valeurs de z qui correspondent à des valeurs données de x & de y, ou, ce qui révient au même, qu'en assignant dans l'espace un même nombre de points par lesquels la surface doive passer. Jusqu'ici j'ai supposé que les conditions, aux quelles devoit satisfaire l'intégrale, étoient de nature à être exprimées analytiquement, mais si ces conditions étoient que la surface dût passer par des courbes discontinuës ou tracées au hazard, les formes des

fonctions ne seroient plus analytiques & seroient par conséquent inassignables neantmoins, comme je l'ai fait voir dans un mémoire précédent, l'intégrale n'en seroit pas moins constructible.

Ainsi lors qu'on a intégré une équation en différences partielles, l'intégrale qui donne en quantités finies la valeur de z, est vague, par ce qu'elle renferme des fonctions aux quelles on peut donner toutes sortes de formes, analytiques ou discontinuës, il faut donc déterminer quelles doivent être les formes chacune en particulier, pour que l'intégrale rempliſſe les conditions particulières de la question, lorsque ces conditions sont analytiques, ou construire l'intégrale lors qu'elles sont discontinuës.

Cette opération est généralement sujette à des grandes difficultés, dont les célébres géometres M.M. D'Alembert, Euler, & La-Grange n'ont encore lévé qu'un très-petit nombre. Je ne crois pas même que nous soïons bientôt en état de les lever toutes; néantmoins, persuadé que dans les matières nouvelles les moindres progrez ne sont pas à négliger, & qu'une idée stérile entre les mains d'un homme ordinaire peut dévenir très-profitable entre celles d'un habile géometre, je vais faire part à l'Académie du résultat de mes récherches sur cet objet; trop heureux si ce mémoire pouvoit être l'occasion de quelques découvertes utiles dans l'analyse ou dans la géométrie.

1.° Quelque soit la condition à laquelle doive satisfaire une intégrale, je donne toujours la valeur déterminée de z lorsqu'elle ne contient qu'une seule fonction arbitraire, ou j'en donne la construction lorsque la condition n'est pas analytique. 2.° S'il y a plus d'une fonction dans l'équation, je ne les détermine & ne les construis que dans certains cas, c'est-à-dire, que pour certaines conditions, qui sont cependant assez étendues, & que l'on peut supposer continuës ou discontinuës. Ainsi chaque problème dans le

mémoire à d'abord une ſolution analytique, & une conſtruction appliquable aux fonctions diſcontinuës, & par ce que cette conſtruction eſt indépendante de la ſolution précédente, j'en déduis une ſéconde ſolution analytique, qui donne toujours le même réſultat que la première, par conſéquent chaque problême eſt une nouvelle preuve de la poſſibilité de conſtruire les fonctions arbitraires diſcontinuës.

Pour donner plus de généralité aux ſolutions, je ſuppoſe la perfection de l'analyſe, c'eſt-à-dire qu'étant donnée une équation quelconque en x & y on puiſſe toujours en tirer la valeur de x en y, ou celle de y en x, ou pour mieux dire, que quelque ſoit la forme connuë de la fonction ψ, on puiſſe toujours tirer la valeur de x en y de l'équation $\psi x = y$, & que les fonctions arbitraires ne ſoient envelopées ſous aucun ſigne d'intégration.

PROBLÊME I

Trouver quelle doit être la forme de la fonction φ dans l'équation $z = \varphi V$, pour qu'en feſant $y = \Delta \cdot x$ on ait $z = \Psi \cdot x$; V étant une quantité quelconque donnée en x & y, & les formes des fonctions Δ & Ψ étant connuës.

N.B. J'ai déjà donné la ſolution de ce problême dans un mémoire qui a précédé celui-ci, mais pour ſuivre un certain ordre, je ſuis obligé de le rémetre ici, où l'énoncé eſt d'ailleurs plus général.

Solution.

Soit miſe dans V la valeur de $y = \Delta \cdot x$, & ſoit V' la fonction de x que donne cette ſubſtitution, il eſt évident que l'on aura par la condition de la queſtion $\Psi \cdot x = \varphi V'$. Soit fait maintenant $V' = u$, d'où l'on tirera la valeur de x en u, que je répréſente par $f \cdot u$, & ſoit miſe cette

valeur dans $\Psi \cdot x = \varphi V'$, on aura $\Psi \cdot (f \cdot u) = \varphi u$. Or on connoit les formes des fonctions Ψ & f, on connoitra par conſéquent celle de la fonction φ. Donc $z = \Psi (fV)$ ſera l'équation demandée. C. Q. F. T.

Exemple.

Soit propoſé de trouver la forme de la fonction φ, pour qu'en feſant $y = mx$, dans l'équation $z = \varphi (x^2 + y^2)$, on ait $z = \frac{x^3}{a}$.

Il eſt clair que ſi l'on met à la place de y dans cette équation ſa valeur mx, elle déviendra $\frac{x^3}{a} = \varphi (x^2 + m^2 x^2)$, puis qu'alors la valeur de z doit être $= \frac{x^3}{a}$. Soit fait maintenant $x^2 + m^2 x^2 = u$, ce qui donne $x^2 = \frac{u}{m^2 + 1}$, & ſoit ſubſtituée cette valeur de x dans la dernière équation, on aura $\frac{u}{(m^2 + 1)a} = \varphi u$, ce qui fera connoitre la forme de la fonction φ; d'où il ſuit que l'équation qui ſatisfera à la queſtion ſera $z = \frac{x^3 + y^3}{(m^2 + 1)a}$.

En effet ſi l'on met à la place de y dans cette équation ſa valeur mx, on trouve $z = \frac{x^3}{a}$.

Remarque I.

L'équation $z = \varphi (x^2 + y^2)$ eſt celle de toutes les ſurfaces des révolutions, l'origine des coordonnées rectangulaires étant dans l'axe, ainſi $z = \frac{x^3 + y^3}{(m^2 + 1)a}$ eſt l'équa-

rion de la ſurface qu'engendreroit la courbe dont les projections ont pour équation $z = \frac{x^3}{a}$ & $y = mx$, en tournant autour d'un axe parallele aux z & mené par l'origine & parce que cette courbe eſt une parabole dont le plan paſſe par l'axe, il s'enſuit que l'équation $z = \frac{x^3 + y^3}{(m^2+1)a}$ eſt celle de la ſurface d'un paraboloïde. J'ai choiſi cet exemple parceque la ſurface en eſt connuë, & que les opérations en ſont ſimples.

Rémarque II

L'opération précédente ſuppoſe que les fonctions Δ & Ψ ſont analytiques, c'eſt-à-dire ſoumiſes à la loi de continuité, mais ſi $y = \Delta \cdot x$ & $z = \Psi \cdot x$ répreſentoient les équations des courbes diſcontinuës & tracées au hazard, la forme de la fonction φ ſeroit inaſſignable, on pourroit nèantmoins la conſtruire, comme on va le voir, ou, ce qui révient au même, conſtruire la valeur, que donne alors pour z l'équation $z = \varphi V$, x & y étant donnés à volonté.

Conſtruction.

Soient $CA\,D$ le plan des x & y, que pour la commodité je ſuppoſerai toujours horiſontal dans la ſuite, $B\,A\,C$ celui des x & z, $s\,m\,S$ la courbe à double courbure, diſcontinue, ou tracée au hazard & dont les projections $r\,q\,R$ & $s\,m'\,S$ ont pour ſymboles d'équations $y = \Delta \cdot x$ & $z = \Psi x$; ſoient enfin $A\,P$ & $P\,Q$ les deux coordonnées x & y priſes à volonté, pour leſquelles il s'agit de trouver la verticale $Q\,M = z$. Cela poſé par le point Q on conſtruira ſur le plan horiſontal la courbe $T\,Q\,q$ dont

Planche I FIG. I

l'équation eſt $V = b$, b étant une indéterminée telle que la courbe paſſe par le point Q; elle coupera la courbe $r\,q\,R$ en un point q par lequel on élevera la verticale $q\,m$, qu'on prolongera juſqu'à ce qu'elle rencontre quelque part la courbe $s\,m\,S$ en un point m, on fera $QM = q\,m$, & le point M ſera dans la ſurface demandée. Car ſi dans l'équation $z = \varphi V$ on fait $V = b$, on a $z =$ conſt. c'eſt-à-dire que toutes les verticales élévées par les points de la courbe $T\,Q\,q$ doivent rencontrer la ſurface à la même hauteur; mais cette conſtante doit être telle que pour le point q l'on ait $z = q\,m$, donc on doit avoir $QM = q\,m$. *C. Q. F. T & D.*

Si par la courbe $T\,Q\,q$ on imagine une ſurface cylindrique verticale, elle coupera la ſurface à conſtruire (ſuppoſée pour un inſtant conſtruite) en une courbe $M\,m$, qui ſera horiſontale, qui paſſera par le point démandé M & dont la projection verticale ſera une droite horiſontale $M'\,m'$. Donc ayant abaiſſé $q\,p$ perpendiculaire aux x, & élévé la verticale $p\,m'$, le point m', où elle coupera la courbe $s\,m'\,S'$, ſera la projection verticale du point m, & l'horiſontale $m'\,M'$ la projection de la courbe $M\,m$; par conſéquent ſi l'on éléve la verticale $P\,M'$, le point M' ſera celle du point M, & l'on aura $PM' = QM$. Cette méthode eſt plus commode, par ce qu'elle n'exige pas qu'on éléve la verticale $q\,m$ dans l'eſpace.

Cette conſtruction eſt générale, mais dans un grand nombre de cas il peût être plus ſimple de lui ſubſtituer un mouvement continu en voici des exemples.

1.° Si l'on a $V = a\,x - y$, on engendrera la ſurface en feſant gliſſer une droite horiſontale parallelement à elle même, ſur la courbe $s\,m\,S$, par ce que dans ce cas là la ligne $T\,Q\,q$, pour quelque point Q que ce ſoit, eſt une droite qui fait un angle conſtant avec l'axe $A\,P$.

2.° Si l'on a $V = x^2 + y^2$, la surface se forme par la révolution de la courbe $s\,m\,S$ au tour de la verticale $A\,B$ prise pour axe, car alors la courbe $T\,Q\,q$ pour quelque point Q que ce soit, est la circonférence d'un cercle dont le centre est au point A; c'est ce que j'ai déjà démontré dans le mémoire précédent.

AUTRE SOLUTION DU MEME PROBLÊME

Tirée de la construction précédente.

Soient $A\,P = x'$ & $P\,Q = y'$, il est évident que la question consiste à trouver une valeur de z en x' & y' qui satisfasse aux conditions. Pour cela soit fait $V = b$, & soit déterminée la constante b de telle manière qu'en fesant dans cette équation $x = x'$, on ait $y = y'$; soit éliminée y des deux équations $V = b$ & $y = \Delta \cdot x$, ce qui donnera une valeur de x en x', y' & constantes; soit mise cette valeur à sa place dans la quantité $\Psi \cdot x$ soit enfin K ce qu'elle dévient alors, $z = K$ sera l'équation démandée.

Exemple.

Pour faire voir l'accord de ces deux solutions, je vais appliquer celle-ci au même exemple que la précédente, où l'on a $V = x^2 + y^2$, $\Delta \cdot x = m\,x$ & $\Psi \cdot x = \frac{x^2}{a}$.

Il est évident qu'afin que dans l'équation $x^2 + y^2 = b$, on ait $y = y'$ en fesant $x = x'$, l'on doit avoir $b = x'^2 + y'^2$; soit donc éliminée y des deux équations $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$ & $y = m\,x$, on aura $x^2 + m^2\,x^2 = x'^2 + y'^2$, ou $x^2 = \frac{x'^2 + y'^2}{1 + m^2}$ soit mise cette valeur à sa place dans $\frac{x^2}{a}$,

l'on aura $\frac{x'^2+y'^2}{a(1+m^2)}$, & par conſéquent pour équation demandée $z = \frac{x'^2+y'^2}{a(1+m^2)}$.

qui eſt la même que celle que nous avons déja trouvée.

PROBLÈME II

Déterminér la forme que doit avoir la fonction φ, pour qu'en feſant dans l'équation $z = M + N\varphi V$ $y = \Delta \cdot x$, on ait $z = \Psi \cdot x$; les quantités M, N & V étant données d' une manière quelconque en x & y.

Solution

Soient M', N' & V' les fonctions de x que l'on a en ſubſtituant à la place de y ſa valeur $\Delta \cdot x$ dans les quantités M, N & V; il eſt évident que l'on aura par la condition $\Psi \cdot x = M' + N'\varphi V'$. Soit fait actuellement $V' = u$, d' où l'on tirera la valeur de x en u, & ſoit $x = fu$ cette valeur, qui miſe à ſa place dans l'équation précédente donnera

$$\Psi \cdot (f \cdot u) = M'' + N'\varphi u,$$

les quantités M'' & N'' étant ce que déviennent M' & N' en y mettant $f \cdot u$ à la place de x on aura par conſéquent

$$\varphi u = \frac{\Psi \cdot (f \cdot u) - M''}{N''}$$

Or on connoit les formes des fonctions Ψ & f, & la manière dont M'' & N'' ſont compoſées de u, donc on connoitra la forme de la fonction φ. C. Q. F. T.

Exemple

Soit propoſé de déterminer la nature de la fonction φ, pour que l'équation $z = y^n x^m + x^p y^q \varphi (ax - y)$

don

donne $z = b x^2$ en fesant $y = c x$.

Soit mise à la place de y sa valeur $c x$, & l'équation déviendra $b x^2 = c^n x^{m+n} + c^q x^{p+q} \varphi (a x - c x)$

soit fait maintenant $a x - c x = u$, ce qui donne $x = \frac{u}{a-c}$, & soit substituée cette valeur de x, on aura

$$\frac{b u^2}{(a-c)^2} = c^n \left(\frac{u}{a-c}\right)^{m+n} + c^q \left(\frac{u}{a-c}\right)^{p+q} \varphi u$$

d'où l'on tirera $\varphi u = \frac{b}{c^q} \left(\frac{u}{a-c}\right)^{2-p-q} - c^{n-q} \left(\frac{u}{a-c}\right)^{m+n-p-q}$

donc l'équation qui satisfera à la question sera

$$z = y^n x^m + x^p y^q \left\{ \frac{b}{c^q} \left(\frac{a x - y}{a-c}\right)^{2-p-q} - c^{n-q} \left(\frac{a x - y}{a-c}\right)^{m+n-p-q} \right\}$$

En effet, si dans cette équation l'on fait $y = c x$, on trouve $z = b x^2$.

En supposant la perfection de l'analyse, cette opération sera toujours praticable, lorsque les fonctions Δ & Ψ seront analytiques, mais si $y = \Delta \cdot x$ & $z = \Psi x$ représentent les équations des courbes discontinues, la fonction φ n'aura pas de valeur analytique. Il sera néantmoins possible de construire la surface dont l'équation est $z = M + N \varphi V$, de telle manière qu'elle passe par la courbe discontinue dont les symboles d'équations sont $y = \Delta \cdot x$ & $z = \Psi \cdot x$.

Construction.

La question se réduit à trouver l'ordonnée z qui répond à un x & un y donnés à volonté. Pour cela soient CAD le plan horisontal des x & y, BAC le plan des x & z, $s m S$ la courbe discontinue par laquelle doit passer la surface, & dont les projections $r q R$ & $s m' S'$ ont pour symboles d'équations, la première $y = \Delta \cdot x$ & la seconde $z = \psi \cdot x$ enfin soient AP & PQ les coordonnées pour lesquelles il s'agit de construire la verticale

Planche I FIG. II

$Q\,M = z$. Cela posé soit décrite sur le plan horisontal la courbe $T\,Q\,q$, dont l'équation est $V = b$, la constante b devant être telle que la courbe passe par le point Q, ou qu'en feſant $x = A\,P$ on ait $y = P\,Q$: cette courbe rencontrera $r\,q\,R$ en un point q, par lequel on élévera la verticale $q\,m$, qu'on prolongera jusqu' à la courbe $s\,m\,S$; on menera $q\,p$ parallele aux y, & on élévera la verticale $p\,m'$, qu'on prolongera jusqu'à la courbe $s\,m'\,S'$ qu'elle rencontrera en un point m', & l'on aura $q\,m = p\,m'$. On construira sur le plan vertical $B\,A\,C$ la courbe $K\,M'm'$ dont l'équation est $z = M' + N'\,\beta$, M' & N' étant les fonctions de x que donne la substitution dans M & N de la valeur de y prise dans l'équation $V = b$, & β étant une constante telle que la courbe passe par le point m'. Enfin on élévera la verticale $P\,M'$, on fera $Q\,M' = P\,M'$, & le point M sera dans la surface demandée.

Car si dans l'équation $z = M + N\,\varphi\,V$ on met à la place de y sa valeur prise dans $V = b$, on aura $z = M' + N'\,\beta$, équation de la projection verticale $K\,M'\,m'$ de l'intersection $M\,m$ de la surface demandée par une surface cylindrique verticale qui auroit pour base la courbe $T\,Q\,q$; & dans laquelle la constante β doit être telle que cette projection passe par le point m' à fin que pour le point p l'on ait $z = p\,m' = q\,m$, & que la surface demandée passe par conséquent par le point m.

Dans certains cas particuliers cette construction se simplifie beaucoup; par exemple, si la proposée est $z = x\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$, on engendrera la surface en feſant glisser une droite sur la courbe à double courbure donnée, & dont l'extrémité soit fixée à l'origine des coordonnées, car l'équation $\frac{x}{y} = b$ est celle d' une droite qui passe par le point A, quelque soit la constante b, & en substituant la valeur

de y prise dans cette équation, on a $z = x \varphi b$, qui est encore celle d'une droite qui passe par le même point quelque soit $\varphi \cdot b$. Ainsi l'équation $z = x \varphi \left(\frac{x}{y}\right)$ est celle d'une surface conique à base quelconque; mais dont le sommet est déterminé à l'origine.

AUTRE SOLUTION DU PROBLEME II.

Tirée de la construction.

La question sera resoluë, si en fesant $AP = x'$, & $PQ = y'$, on trouve une valeur de z en x' & y' qui satisfasse aux conditions. Pour cela soit fait $V = b$, & soit déterminé b de telle manière qu'en fesant $x = x'$ on ait $y = y'$. Soit tirée de cette équation la valeur de y en x, x' & y', pour la mettre dans les quantités M & N & soient M' & N' ce qu'elles deviennent par cette substitution; soit éliminée y de deux équations $V = b$ & $y = \Delta \cdot x$, ce qui donnera une valeur de x en x' & y', que l'on mettra à sa place dans $\psi \cdot x$, & soit K ce que devient cette fonction; cela fait, si dans l'équation $M' + N' \beta = z$ on détermine β de telle manière que pour cette même valeur de x on ait $z = K$, & qu'ensuite on mette par tout x' à la place de x, on aura l'équation demandée.

Je ne démontre pas ce procédé, par ce qu'il n'est que l'application de l'analyse à la construction précédente, où je suppose alors que les fonctions Δ & Ψ soient analytiques.

Il pourroit arriver que la proposée fût de cette forme, $F \cdot z = M + N \varphi V$, F étant le caractère d'une fonction connüe, mais cette équation ne seroit pas plus difficile à déterminer que la précédente, car en mettant par tout à la place de y sa valeur prise dans $y = \Delta x$, on

aura $F(\Psi \cdot x) = M' + N' \varphi V'$, ou $\Psi' x = M' + N' \varphi V'$, d'où l'on tirera la nature de la fonction φ comme je l'ai fait dans la première solution. Ainsi par ce problême on est en état de déterminer toute équation qui ne contiendra qu'une fonction arbitraire.

CONSTRUCTION DU MEME PROBLÊME.

Dans le cas où toutes les quantités M, N & V seroient elles mêmes discontinuës.

Les quantités M, N & V étant fonctions des deux variables x & y, ne peuvent être représentées que par les ordonnées verticales de trois surfaces courbes données ou constructibles, & par ce qu'elles sont supposées discontinuës ; l'on doit avoir, avant de construire la surface demandée, trois autres surfaces discontinuës, soit données au hazard, soit construites par quelques méthodes telles que celles que j'ai déjà données, & dont les symboles d'équations soient

$z = M$ pour la première.
$z = N$ pour la seconde.
& $z = V$ pour la troisième.

Planche I FIG. II

On élévera par le point donné Q, pour lequel on cherche l'ordonnée de la surface à construire, une verticale que l'on prolongera jusqu'à ce qu'elle rencontre la surface, dont le symbole d'équation est $z = V$, en un point par lequel on menera un plan horizontal, qui coupera cette surface en une courbe dont la projection horisontale sera la courbe discontinue TQq, on aura pour équation $V = b$ · cette courbe étant construite, on imaginera une surface cylindrique verticale, dont elle soit la base, & qui coupera les deux autres surfaces données en deux courbes dont les projections verticales seront les courbes disconti-

nuës HNG & hng, & auront pour ſymboles d'équations la première $z = N'$ & la ſeconde $z = M'$; les quantités M' & N' repréſentant ce que deviendroient M & N ſi l'on pouvoit analytiquement y mettre pour y ſa valeur priſe dans l'équation diſcontinue $V = b$ · or l'équation de la courbe $K M' m'$ eſt comme je l'ai déjà dit

$$z = M' + N' \beta$$

on aura donc $P M' = P n + P N \times \beta$ · mais la conſtante β doit être telle que la courbe paſſe par le point m', ou que pour l'abciſſe $A p$ l'on ait $p m' = p g + p G \times \beta$, ce qui donne $\beta = \frac{p m' - p g}{p G}$, donc ſi l'on conſtruit l'expreſſion

$$P n + \frac{P N \times \{ p m' - p g \}}{p G}$$

on aura l'ordonnée $P M' = Q M$. C. Q. F. F.

PROBLÊME III

Déterminer les formes que doivent avoir les deux fonctions φ & φ', pour que l'équation $z = \varphi V + x \varphi' V$ ſatisfaſſe aux deux conditions ſuivantes, 1° qu'en feſant $y = \Delta \cdot x$ on ait $z = \Psi \cdot x$, 2° qu'en feſant $y = \Delta' \cdot x$, on ait $z = \Psi' \cdot x$, la quantité V étant une fonction donnée en x & y, & les formes des fonctions Δ, Δ', Ψ, Ψ' étant connuës.

Solution.

Soient V' la fonction de x que l'on obtient en mettant à la place de y dans V ſa première valeur $= \Delta \cdot x$, & V'' la fonction de x que l'on obtient en y mettant ſa ſeconde valeur $\Delta' x$, il eſt clair que l'on aura par les conditions les deux équations ſuivantes.

(A)

(A) $\Psi \cdot x = \varphi V' + x\,\varphi' V'$

(B) $\Psi' \cdot x = \varphi V'' + x\,\varphi' V''$.

Soit fait $V' = u$, & de cette équation soit tirée la valeur de x en u, que je suppose représentée par $f \cdot u$, & que l'on mettra à la place de x dans l'équation (A) l'on aura (C) $\cdot\ \Psi \cdot (f \cdot u) = \varphi u + f u \cdot \varphi' u$.

Soit fait de même $V'' = v$, & soit $f' \cdot v$ la valeur de x prise dans cette équation, en la mettant dans l'équation (B) l' on aura

(D) $\Psi' (f' \cdot v) = \varphi v + f' u \cdot \varphi' v$.

on tirera de la première $\varphi u = \Psi (f \cdot u) - f u \cdot \varphi' u$, mettant à la place de φ cette forme dans l' équation (D), l'on aura

$$\Psi' (f' \cdot v) = \Psi (f \cdot v) - f \cdot v \cdot \varphi' v + f' v \cdot \varphi' v$$

& par conséquent

$$\varphi' v = \frac{\Psi' \cdot (f' \cdot v) - \Psi \cdot (f \cdot v)}{f' v - f \cdot v}$$

or on connoit les formes des fonctions Ψ, Ψ', f & f', donc on connoitra 1° celle de la fonction φ'. Substituant actuellement à la place de φ' dans l'équation (C), la forme que l'on vient de trouver, l'on aura

$$\varphi u = \Psi (f \cdot u) - \frac{f \cdot u\,\Psi' \cdot (f' u) + f \cdot u\,\Psi \cdot (f \cdot u)}{f' u - f u}$$

ou bien réduisant

$$\varphi\ u = \frac{f' u\,\Psi (f u) - f u \cdot \Psi' (f' \cdot u)}{f' u - f u}$$

donc on connoitra 2° la forme de la fonction φ, & par conséquent l'équation demandée sera

$$z = \frac{f' V\,\Psi (f \cdot V) - f V\,\Psi' (f' V) + x\,\Psi' (f' V) - x\,\Psi (f \cdot V)}{f' V - f V}$$

C. Q. F. T.

Exemple:

Soit proposé de déterminer les fonctions arbitraires φ & φ' dans l'équation

$$z = \varphi(ax - y) + x\,\varphi'(ax - y)$$

de telle manière 1° qu'en faisant $y = bx$ on ait $z = gx^2$, 2° qu'en faisant $y = cx + h$, on ait $z = mx^2 + n$.

On mettra à la place de y ses deux valeurs bx & $cx + h$, & l'on aura les deux équations suivantes

$$gx^2 = \varphi(ax - bx) + x\,\varphi'(ax - bx)$$
$$mx^2 + n = \varphi(ax - cx - h) + x\,\varphi'(ax - cx - h)$$

on fera $ax - bx = u$, ce qui donnera $x = \frac{u}{a-b}$, & la première équation deviendra

$$\frac{gu^2}{(a-b)^2} = \varphi u + \frac{u}{a-b}\,\varphi' u,$$

d'où l'on tirera $\varphi u = \frac{gu^2}{(a-b)^2} - \frac{u}{a-b}\,\varphi' u$.

On fera de même $ax - cx - h = v$, ce qui donnera $x = \frac{h+v}{a-c}$, & la seconde équation déviendra $m\left(\frac{h+v}{a-c}\right)^2 + n = \varphi v + \frac{h+v}{a-c}\,\varphi' v$. Substituant à la place de la fonction φ sa forme que l'on vient de trouver, on aura

$$m\left(\frac{h+v}{a-c}\right)^2 + n = \frac{gv^2}{(a-b)^2} - \frac{v}{a-b}\,\varphi' v + \frac{h+v}{a-c}\,\varphi' v$$

d'où l'on tirera $\varphi' v = \dfrac{m\left(\frac{h+v}{a-c}\right)^2 + n - \frac{gv^2}{(a-b)^2}}{\frac{h+v}{a-c} - \frac{v}{a-b}}$

mettant enfin cette forme dans la valeur de φu, & réduisant on trouvera

$$\varphi u = \frac{\frac{h+u}{a-c}\cdot\frac{g u^3}{(a-b)^3} - \frac{m u}{a-b}\left(\frac{h+u}{a-c}\right)^2 - \frac{n u}{a-b}}{\frac{h+u}{a-c} - \frac{u}{a-b}}$$

l'équation qui satisfait à la question sera donc

$$z = \frac{\frac{h+ax-y}{a-c}\cdot g\left(\frac{ax-y}{a-b}\right)^3 - \frac{m(ax-y)}{a-b}\left(\frac{h+ax-y}{a-c}\right)^2 - \frac{n(ax-y)}{a-b} + mx\left(\frac{h+ax-y}{a-c}\right)^2 + nx\ g\left(\frac{ax-y}{a-b}\right)^3}{\frac{h+ax-y}{a-c} - \frac{ax-y}{a-b}}$$

il est en effet facile de voir que cette équation remplit les deux conditions.

On pourroit réduire considérablement cette valeur de z, mais elle ne paroitroit pas être de la forme $\varphi(ax-y) + x\varphi'(ax-y)$.

Remarque.

L'équation $z = \varphi(ax-y) + x\varphi'(ax-y)$, intégrale de $\frac{\delta\delta z}{dx^2} + 2a\frac{\delta dz}{dx\,dy} + a^2\frac{ddz}{dy^2} = 0$ est celle de la surface engendrée par le mouvement d'une droite qui glisseroit sur les deux courbes à double courbure dont les équations sont $y = \Delta\cdot x$ & $z = \Psi\cdot x$ pour l'une $y = \Delta'\cdot x$, $z = \Psi'\cdot x$ & pour l'autre, de manière que cette droite fût toujours dans des plans verticaux, paralleles, & dont l'équation générale seroit $ax - y = \beta$, β étant une constante pour chaque plan, mais variable d'un plan à l'autre. Car en faisant $ax - y =$ constante dans l'équation, elle devient $z = A + Bx$, qui est à une droite, & dans laquelle les constantes A & B doivent être telles que cette droite soit appuiée sur les deux courbes à double courbure données à fin que la surface, en passant par les deux courbes, satisfasse aux conditions.

Il ſeroit facile de tirer delà la conſtruction de l'équation $\zeta = \varphi(ax - y) + x\,\varphi'(ax - y)$, même en ſuppoſant les fonctions Δ, Δ', Ψ, & Ψ' diſcontinuës, mais comme ce n'eſt qu'un cas particulier du problême ſuivant, je ne m'y arrêterai pas d'avantage.

PROBLÊME IV.

Déterminer les formes des fonctions φ, & φ', pour que dans l'équation

$$\zeta = M\varphi V + N\varphi' V + K$$

l'on ait 1° $\zeta = \Psi \cdot x$ en feſant $y = \Delta \cdot x$, 2° $\zeta = \Psi' x$ en feſant $y = \Delta' x$. Les quantités M, N, K & V étant données d'une manière quelconque en x & y, & les fonctions Δ, Δ', Ψ & Ψ' étant auſſi connuës.

Solution.

Soient M', N', K' & V' les fonctions de x que deviennent correſpondamment les quantités M, N, K & V en y mettant pour y ſa première valeur $\Delta \cdot x$. Soient de même M'', N'', K'' & V'' ce qu'elles deviennent en y mettant la ſeconde valeur de y $\Delta \cdot x$, il eſt évident que l'on aura les deux équations ſuivantes.

$$(A) \qquad \Psi \cdot x = M'\varphi V' + N'\varphi' V' + K'$$

$$\&\ (B) \qquad \Psi' x = M''\varphi V'' + N''\varphi' V'' + K''$$

Soit fait $V' = u$, & ſoit $x = f u$ la valeur de x que donne cette équation, ſoit fait de même $V'' = v$ & ſoit $x = f' v$ la valeur de x que l'on en tire; on ſubſtituera la première de ces valeurs dans (A) & la ſeconde dans (B), & l'on aura

$$\Psi(f \cdot u) = M\varphi u + N\varphi' u + K$$

$$\&\ \Psi'(f' \cdot v) = M\varphi v + N\varphi' v + K$$

les quantités M, N & K étant les fonctions de u, que

donne la ſubſtitution de $f \cdot u$ à la place de x dans M', N' & K', de même M'', N'' & K'' étant les fonctions de v que l'on trouve en mettant $f' v$ à la place de x dans M'', N'' & K''. Ces deux équations ſe traiteront comme les équations (C) & (D) du problême précédent, c'eſt-à-dire qu'on en éliminera une des fonctions arbitraires, pour connoître la forme de l'autre & réciproquement, ce qui n'eſt ſujet à aucune difficulté.

Remarque.

On ne parvient par cette méthode à trouver les formes des deux fonctions indépendantes φ & φ', que par ce qu'elles ſont compoſées de la même quantité V; autrement elle ſeroit inſufiſante.

Corollaire.

Il ſuit delà que de quelque nombre d'arbitraires que ſoit compoſée l'équation

$$z = K + L\varphi V + M\varphi' V + N\varphi'' V \ldots \text{ \&c.}$$

il ſera toujours poſſible de déterminer les fonctions φ, φ' φ''', pour qu'en feſant

$$1^\circ\ y = \Delta \cdot x \text{ on ait } z = \Psi \cdot x$$
$$2^\circ\ y = \Delta' \cdot x \text{ on ait } z = \Psi' \cdot x$$
$$3^\circ\ y = \Delta'' \cdot x \text{ on ait } z = \Psi'' \cdot x$$
$$\text{\&c.} \qquad \text{\&c.}$$

le nombre de ces conditions étant égal à celui des arbitraires, car en exprimant les conditions on a

$$1^\circ\ \Psi \cdot x = K' + L'\varphi V' + M'\varphi' V' + N'\varphi'' V' \ldots \text{\&c.}$$
$$2^\circ\ \Psi' \cdot x = K'' + L''\varphi V'' + M''\varphi' V'' + N''\varphi'' V'' \ldots \text{\&c.}$$
$$3^\circ\ \Psi'' \cdot x = K''' + L'''\varphi V''' + M'''\varphi' V''' + N'''\varphi'' V''' \ldots \text{\&c.}$$
$$\text{\&c.} \qquad \text{\&c.}$$

feſant dans la première $V' = u$, dans la ſeconde $V'' = v$,

dans la troisième $V''' = \omega \ldots$ &c. on aura autant d'équations

$$\Psi(f \cdot u) = K^{\backprime} + L^{\backprime}\varphi u + M^{\backprime}\varphi' u + N^{\backprime}\varphi'' u \cdots \&c.$$
$$\Psi'(f' \cdot v) = K^{\backprime\backprime} + L^{\backprime\backprime}\varphi v + M^{\backprime\backprime}\varphi' v + N^{\backprime\backprime}\varphi'' v \cdots \&c.$$
$$\Psi''(f'' \cdot \omega) = K^{\backprime\backprime\backprime} + L^{\backprime\backprime\backprime}\varphi \omega + M^{\backprime\backprime\backprime}\varphi' \omega + N^{\backprime\backprime\backprime}\varphi'' \omega \cdots \&c.$$
&c. &c.

qu'il y a d'arbitraires dans la proposée, par conséquent il sera facile de les éliminer toutes, pour les connoitre chacune en particulier, comme je l'ai fait dans le problême précédent.

Construction.

Il s'agit de trouver pour un x & un y donné à volonté l'ordonnée verticale z de la surface donc l'équation est $z = M\varphi V + N\varphi' V$, les fonctions φ & φ' étant telles que cette surface passe par deux courbes à double courbure données, continuës ou discontinuës & qui aient pour symboles d'équations la première $y = \Delta \cdot x$ & $z = \Psi x$, & la seconde $y = \Delta' \cdot x$ & $z = \Psi' \cdot x$

Pour cela soient, comme dans les figures précédentes, Planche I FIG. III CAD le plan horisontal des x & y, BAC celui des x & z, smS une des courbes à double courbure par lesquelles doit passer la surface, & dont les projections rqR & $sm'S'$ ont pour symboles d'équations la première $y = \Delta \cdot x$ & la seconde $z = \Psi \cdot x$. Soit de même uNU la seconde courbe à double courbure donnée, & donc les projections vTV & unU' ont des équations représentées par $y = \Delta' \cdot x$ & $z = \Psi' \cdot x$. Enfin soient AP & PQ les x & y données à volonté, pour lesquelles il s'agit de construire l'ordonnée verticale $QM = z$. Cela posé, par le point donné Q on construira la courbe $T'Qq$ qui ait pour équation $V = b$, l'indéterminée b devant être telle que cette courbe passe par le point Q, elle rencontrera

les deux courbes $r\,q\,R$ & $v\,T\,V$ en deux points q & T, par lesquels on abbaissera sur l'axe $A\,C'$ les perpendiculaires $q\,q'$ & $T\,t$, ce qui donnera les points q' & t par lesquels on élévera les verticales $q'\,m'$ & $t\,n$, qu'on prolongera jusqu'à ce qu'elles rencontrent, la première, la courbe $s\,m'\,S'$ en un point m', &, la seconde, la courbe $u\,n\,U'$ en un point n. Celà fait on construira sur le plan vertical $B\,A\,C$ la courbe $n\,M'\,m'$ qui a pour équation $z = M' \propto + N'\beta + K'$, les quantités M', N' & K' étant ce que deviennent correspondamment M, N & K en y mettant pour y sa valeur prise dans l'équation $V = b$, de plus $\propto$ & β étant des constantes qu'on déterminera de telle manière que la courbe $n\,M'\,m'$ passe par les points déterminés n & m'; enfin on élévera la verticale $P\,M'$, on fera $Q\,M = P\,M'$, & le point M sera dans la surface demandée.

En effet, soient élevées les verticales $q\,m$ & $T\,N$, il est évident par construction, que l'on aura $q\,m = q'\,m'$, & $T\,N = t\,n$; soit imaginée par la courbe $T\,Q\,q$ une surface cylindrique verticale, dont l'équation sera nécessairement $V = b$, elle coupera la surface à construire dans une courbe $N\,M\,m$ qui passera par le point cherché M & par les deux points N & m. La projection verticale de cette intersection passera par conséquent par les points n & m', & on aura son équation on faisant $V = b$ dans la proposée. Cette équation sera donc $z = M' \propto + N'\beta + K'$, dans laquelle il est évident que les constantes $\propto$ & β doivent être déterminées de manière que cette projection passe par les deux points n & m'. Or les deux courbes $N\,M\,m$; & $n\,M'\,m'$ pour la même abscisse $A\,P$ ont les ordonnées $P\,M$ & $P\,M'$ égales, donc en faisant $Q\,M = P\,M'$, le point M est dans la surface demandée.

Corollaire.

On conſtruira de la même manière l'équation $z = K + L\varphi V + M\varphi' V + N\varphi'' V \ldots$ &c. quelque nombre de fonctions arbitraires qu'elle renferme, pourvu que l'on ait un pareil nombre de courbes données, continues ou diſcontinues, par leſquelles la ſurface ſoit obligée de paſſer. Il arrivera ſeulement que l'équation

$$z = K' + L' \propto + M' \beta N' \gamma \ldots . \text{ \&c.}$$

qui appartient à la courbe $n M' m'$, contiendra un pareil nombre de conſtantes indéterminées, mais on aura un même nombre de points tels que n, $m' \ldots .$ &c. par leſquels devra paſſer cette courbe, & qui ſerviront à déterminer ces conſtantes.

AUTRE SOLUTION DU PROBLÊME IV

Tirée de la conſtruction.

Soient $AP = x'$, & $PQ = y'$, il eſt évident que la queſtion conſiſte à trouver la valeur de z en x' & y' qui ſatisfait aux conditions. Pour cela on fera $V = b$, & l'on déterminera b de telle manière qu'en feſant $x = x'$ on ait $y = y'$; on prendra dans cette équation la valeur de y en x, x' & y', on la mettra à ſa place dans les quantités M, N & K, & ſoient M', N' & K' les fonctions en x, x' & y' que donne cette ſubſtitution. On éliminera y des deux équations $V = b$ & $y = \Delta \cdot x$, ce qui donnera une premiére valeur de x en x' & y' que l'on mettra à ſa place dans $\Psi \cdot x$, & ſoit P ce que devient cette quantité. On éliminera de même y des deux équations $V = b$ & $y = \Delta' \cdot x$, ce qui donnera une ſeconde valeur de x en x' en x' & y', que l'on mettra à ſa place dans $\Psi' x$, & ſoit P ce que devient cette quantité. Cela fait, ſi

Planche I FIG. III

dans l'équation

$$z = M' \propto + N' \beta + K'$$

on détermine les constantes $\propto$ & β de telle manière 1° que, pour la première valeur que l'on vient de trouver pour x, on ait $z = P$, 2° que pour la seconde valeur, on ait $z = P'$, & qu'ensuite on mette x' à la place de x, on aura l'équation demandée.

Cette solution n'étant simplement que l'application de l'analyse à la construction précédente, il est inutile de la démontrer. On remarquera seulement qu'elle ne peut avoir lieu qu'en supposant les fonctions Δ, Δ', Ψ & Ψ' analytiques & continues.

L'application de ces deux solutions à un même exemple produiroit le même resultat.

Corollaire.

On détermineroit facilement par cette méthode, comme par la première les fonctions arbitraires dans l'équation $z = K + L\varphi V + M\varphi' V + N\varphi'' V \cdots$ &c., il arriveroit seulement que l'équation $z = K' + L' \propto + M' \beta + N' \gamma \cdots$ &c. Contiendroit autant des constantes indéterminées que la proposée renfermeroit de fonctions arbitraires, mais aussi l'on auroit un même nombre de conditions pour les déterminer, par ce qu'on trouveroit autant de valeurs particulières de x qui mises à sa place devroient donner la première $z = P$, la seconde $z = P'$, la troisième $z = P'' \cdots$ &c.

PROBLEME V

Déterminer la forme que doit avoir chacune des fonctions φ & φ' dans l'équation $z = \varphi V + \varphi' W$, pour qu'en faisant 1° $V = a$, on ait $z = F \cdot x$, 2° qu'en faisant

$y = \Delta \cdot x$ on ait $z = \Psi \cdot x$. Les quantités V & W étant données d'une manière quelconque en x & y & les fonctions F, Δ & Ψ étant de formes connuës.

Il faut remarquer que la première condition n'a pas toute la généralité dont elle seroit susceptible, par ce qu'elle renferme la quantité déterminée V.

Solution.

Soit W' la fonction de x que l'on obtient en mettant dans W pour y sa valeur prise dans l'équation $V = a$, il est clair que l'on aura par la première condition

$$F \cdot x = \varphi a + \varphi' W'$$

& par conséquent $\varphi' W' = F \cdot x - \varphi a$. Soit fait $W' = u$, pour en tirer une valeur de x en u, que je représente par $f \cdot u$, on aura en substituant cette valeur

$$\varphi' u = F(f \cdot u) - \varphi a.$$

Mettant cette forme à sa place dans la proposée, elle deviendra $z = \varphi V + F(f \cdot W) - \varphi a$ mais par ce que φa est une constante, la quantité $\varphi V - \varphi a$ est une certaine fonction de V différente de φV, & que je désigne par $\varphi_1 V$; on aura donc

$$z = \varphi_1 V + F(f W)$$

Equation dans laquelle il n'y a plus qu'une fonction arbitraire, puisque l'on connoit les formes des fonctions F & f. Or il reste encore la seconde condition que l'on n'a pas encore employée, donc elle rentrera dans le cas du problême II & se traitera de la même manière.

Remarque.

Quoique dans les conditions (qui sont que l'on ait 1° $z = F \cdot x$ en faisant $V = a$, 2° $z = \Psi \cdot x$ en faisant $y = \Delta \cdot x$) les fonctions F, Δ & Ψ puissent être quel-

conques, il eſt néantmoins néceſſaire, pour que la queſtion ne renferme pas de contradiction, qu'elles aient entr'elles un certain rapport. En effet les équations $y = \Delta . x$ & $z = \Psi . x$ appartiennent à une courbe à double courbure déterminée par laquelle doit paſſer la ſurface courbe qui a pour équation la propoſée, de même $V = a$ & $z = F . x$ ſont les équations d'une autre courbe à double courbure par laquelle doit auſſi paſſer la même ſurface. Or, comme il ſera facile de la réconnoitre dans la conſtruction ſuivante, ces deux courbes doivent ſe couper ſur la ſurface, donc leurs projections doivent auſſi ſe couper, donc pour l'ordonnée x qui répond au point d'interſection de leurs projections horiſontales, ou doit avoir auſſi un point d'interſection dans les projections verticales, ce qui peut s'expliquer analytiquement de cette manière les fonctions F, Δ & Ψ doivent être telles qu'en éliminant y des deux équations $V = a$ & $y = \Delta . x$, pour avoir une valeur de x en conſtantes, & en ſubſtituant cette valeur dans les fonctions $F . x$ & $\Psi . x$, on ait deux quantités égales.

Exemple.

Soit propoſé de déterminer les formes des fonctions arbitraires φ & φ', pour que dans l'équation $z = \varphi (bx - y) + \varphi' (x + y)$ on ait 1° $z = \sqrt{Ax}$ en feſant $bx - y = a$, 2° $z = Kx$ en feſant $y = n + qx$.

(D'après la rémarque précédente les conſtantes A, a, K, n & q, qui entrent dans les expreſſions des conditions à remplir, doivent être telles que l'on ait $K = \sqrt{A\frac{b-q}{n+a}}$, car ſi l'on égale les deux valeurs de y on aura $bx - a = n + qx$, ce qui donne $x = \frac{n+a}{b-q}$ & mettant cette valeur

leur dans les quantités $\sqrt{Ax}$ & Kx, qui doivent alors être égales, on aura $\sqrt{A\frac{n+a}{b-q}} = K\frac{n+a}{b-q}$, d'où l'on tirera $K = \sqrt{A\frac{b-q}{n+a}}$)

L'équation $bx - y = a$ donne $y = bx - a$, mettant cette valeur à la place de y dans la propoſée, on aura $\sqrt{Ax} = \varphi a + \varphi'(x + bx - a)$, ou $\varphi'(x + bx - a) = \sqrt{Ax} - \varphi a$. Soit fait $x + bx - a = u$, ce qui donne $x = \frac{a+u}{b+1}$, & ſoit miſe cette valeur de x à ſa place dans la valeur de la fonction φ', & l'on aura $\varphi' u = \sqrt{A\frac{a+u}{b+1}} - \varphi a$, ce qui fera connoitre la forme de la fonction φ', que l'on ſubſtituera dans la propoſée, & l'on aura $z = \varphi(bx - y) + \sqrt{A\frac{a+x+y}{b+1}} - \varphi a$ ou bien feſant $\varphi(bx - y) - \varphi a = \varphi'(bx - y)$ l'on aura

$$z = \varphi'(bx - y) + \sqrt{A\frac{a+x+y}{b+1}}$$

équation dans laquelle il ne ſe trouve plus que la fonction arbitraire φ', & que l'on traitera comme celle du problême II.

Pour cela, on ſubſtituëra à y ſa valeur priſe dans l'équation $y = n + qx$, & l'on aura

$$Kx = \varphi'(bx - n - qx) + \sqrt{A\frac{a+x+n+qx}{b-1}}$$

que l'on transformera en feſant $bx - n - qx = v$,

ou $x = \frac{n+v}{b-q}$ & l'on aura

$$K\frac{n+v}{b-q} = \varphi' v + \sqrt{A\frac{a+n+\frac{n+v}{b-q}(1+q)}{b-1}}$$

où il ſera facile de reconnoitre la forme de la fonction φ', & d'où l'on conclurra que l'équation demandée, eſt

$$z = K\frac{n+bx-y}{b-q} - \sqrt{A\frac{a+n+\frac{n+bx-y}{b-q}(1+q)}{b+1}} + \sqrt{A\frac{a-x+y}{b+1}}.$$

En effet ſi l'on fait dans cette équation $y = n + qx$, on trouve $z = Kx$, & ſi l'on fait $bx - y = a$, on trouve $z = \sqrt{Ax}$, par ce que comme je l'ai fait remarquer plus haut, l'on doit avoir $K = \sqrt{A\frac{b-q}{n+a}}$.

Conſtruction.

La queſtion conſiſte, comme dans les conſtructions précédentes à trouver pour deux coordonnées x, & y données à volonté l'ordonnée verticale z de la ſurface courbe qui a pour équation $z = \varphi V + \varphi' W$, quand même les deux courbes à double courbure par leſquelles doit paſſer cette ſurface, & dont les projections ont pour ſymboles d'équations, l'une $V = a$ & $z = F \cdot x$, l'autre $y = \Delta \cdot x$ & $z = \Psi \cdot x$, ſeroient diſcontinuës & tracées au hazard dans l'eſpace.

Planche II FIG. IV Pour cela, ſoient CAD le plan horiſontal des x & y, BAC celui des x & z, $M'm'$ & $sm'S$ les deux courbes à double courbure par leſquelles doit paſſer la ſurface, ſoient rqR & $sm''m'''$ les projections horiſontale & verticale de la première, & dont les ſymboles d'équations ſont $V = a$ pour l'une & $z = F \cdot x$ pour l'autre ; ſoient de même $Q'q'$ & $YM''m''$ les projections horiſontale &

verticale de la ſeconde, & dont les équations ſont repréſentées par $y = \Delta . x$ pour l'une, & par $z = \Psi . x$ pour l'autre. Il eſt évident que ſi par le point q' interſection des deux courbes $Q' q'$ & $r R$ on éléve la verticale $q' m'$, elle rencontrera dans le même point m' les deux courbes $s m' S$ & $M' m'$, par ce qu'étant ſur la même ſurface, ces deux courbes doivent avoir un point commun correſpondant au point d'interſection de leurs projections; d'où il ſuit que ſi l'on mêne $q' K'$ parallele aux y, & que l'on éléve la verticale $K' m''$, cette droite rencontrera les deux courbes $S m'' m'''$ & $Y M'' m''$ dans le même point m'', & que l'on aura $K' m'' = q' m'$. Enfin ſoient $A P = x$, $P Q = y$, de manière qu'il faille conſtruire la verticale $Q M$ qui paſſe par le point Q, le point M étant dans la ſurface.

Cela poſé, on conſtruira ſur le plan horiſontal la courbe $Q q$ dont l'équation eſt $V = \alpha$, α étant une conſtante telle que la courbe paſſe par le point Q, cette courbe coupera $r q' R$ quelque part en un point q, par lequel on menera $q K$ perpendiculaire aux x, on élévera la verticale $K m''$, qu'on prolongera juſqu'à ce qu'elle coupe la courbe $S m'' m'''$ en un point m'''. on prendra dans l'équation $V = \alpha$ la valeur de y que l'on ſubſtituera dans W, pour avoir une fonction de x que je repréſente par W', on fera la même choſe pour l'équation $V = a$, & ſoit W' la nouvelle fonction de x trouvée; on fera enſuite $W' = u$, ce qui donnera une valeur de x en u, que je repréſente par $f . u$, la forme de la fonction f étant connue. On portera de A en X une droite égale à $f W'$, $A P$ étant $= x$, & on élévera la verticale $X Y$ qu'on terminera à la courbe $M'' m''$: on regardera pour un inſtant $A K$ comme $= x$, & l'on fera dans cette hypothéſe $A G = f . W'$, on élévera la verticale $G N$, enfin on fera $Q M = X Y + K m''' - G N$, & le point M ſera dans

la ſurface demandée. (La quantité $K m''' - G N$ eſt toujours la même pour toutes les verticales ménées par les points de la courbe $Q q$, c'eſt à-dire qu'elle eſt conſtante tant que $\propto$ ne varie point).

Démonſtration.

Soit ſuppoſée pour un inſtant la ſurface conſtruite, & ſoit imaginée par la courbe $Q q$ une ſurface cylindrique verticale, qui coupe la ſurface ſuivant une courbe $M m$, dont $M''' m'''$ ſoit la projection verticale, il eſt évident 1° que cette projection doit paſſer par le point m'', puiſque l'interſection paſſe elle même par le point m, & que le point m''' eſt la projection verticale du point m; 2° que l'on aura l'équation de la courbe $M''' m'''$ en mettant dans la propoſée $z = \varphi V + \varphi' W$ à la place de y ſa valeur priſe dans $V = \propto$, équation de la ſurface cylindrique verticale. Cette équation ſera donc $z = A + \varphi' W'$, la conſtante arbitraire A devant être telle que la courbe $M''' m'''$ paſſe par le point déterminé m'''. Mais ſi l'on fait auſſi paſſer par la courbe $Q' q'$ une ſurface cylindrique verticale, dont l'équation ſera néceſſairement $V = a$, elle coupera la ſurface à conſtruire ſuivant la courbe $M' m'$, dont la projection verticale eſt $Y M'' m''$, & l'on aura l'équation de cette projection, en mettant de même dans la propoſée $z = \varphi V + \varphi' W$, à la place de y ſa valeur priſe dans $V = a$. Cette équation ſera par conſéquent $z = a + \varphi' W$, or la courbe $Y M'' m''$ eſt donnée, & ſon équation eſt auſſi $z = F \cdot x$, donc on aura $F x = a + \varphi' W$, & par conſéquent $\varphi' W = F x - a$. Soit fait actuellement $W = u$, d'où l'on tirera la valeur de x en u qui ſera $x = f \cdot u$, & ſoit ſubſtituée cette valeur de x dans la dernière équation, elle deviendra $\varphi' u = F (f \cdot u) - a$, ce qui fera connoitre la forme de la fonction φ', & d'où il ſera facile

de conclure que l'équation de la courbe $M''' m'''$ doit être $z = A - a + F(f \cdot W')$. Mais puisque l'équation de la courbe $Y M'' m''$ est $z = F \cdot x$, il suit que si l'on porte de A en X une quantité égale à $f \cdot W'$, ce qui n'est sujet à aucune difficulté, la verticale XY sera $= F(f \cdot W')$. Quant à la constante $A - a$, que pour abbreger je representé par h, elle doit être telle que pour le point K on ait $z = K m'''$. Soit pour un instant régardé AK comme $= x$, soit fait dans cette hypothèse $AG = f \cdot W'$, & soit élévée la verticale GN, il est évident que l'on aura z ou $K m''' = h + GN$, donc on aura $h = K m''' - GN$, & par conséquent $P M''' = XY + K m''' - GN$: or $Q M = P M'''$, donc .... &c. C. Q. F. D.

Remarque I.

Pour simplifier la construction, j'ai fait quelques opérations analytiques, mais elles ne s'exécutent pas sur les fonctions $F\Delta$ & Ψ, donc les formes peuvent être soumises ou non à la loi de continuité. Je n'ai opéré que sur les quantités V & W que j'ai supposées analytiques. Il pourroit néantmoins arriver que ces grandeurs fussent discontinuës, & ne pussent être representées chacune que par l'ordonnée d'une surface courbe donnée au hazard dans l'espace, ou constructible par une méthode quelconque, alors la construction précédente seroit imparfaite, puisque les opérations prescrites ne pourroient pas s'éxécuter analytiquement, mais il seroit possible de les construire elles mêmes.

Tout étant dans la figure 5, comme dans la figure 4, il s'agit premièrement de construire les courbes Qq & $Q'q'$ dont les équations discontinuës ont pour symboles $V = \infty$ & $V = a$. Pour cela, je suppose donnée dans l'espace la surface courbe dont l'équation est représentée

Planche II FIG. V

par $z = V$, & on la coupera par deux plans horisontaux distans du plan CAD, l'un de la quantité $\propto$ & l'autre de a, les projections horisontales des sections que formeront ces deux plans seront les courbes demandées Qq & $Q'q'$, car ces deux courbes seront telles que l'on aura pour l'une z ou $V = \propto$ & pour l'autre $V = a$. On construira donc ces deux projections. (Cette opération n'est sujette à aucune difficulté, car si la surface est donnée quoiqu'au hazard, pour un x, & un z quelconque, on doit être en état de trouver la coordonnée y correspondante, & par conséquent pour l'abscisse AP & la verticale $z = \propto$ ou $z = a$, de trouver l'ordonnée PQ on PQ'. Si cette surface n'est pas tout à fait donnée au hazard, mais qu' elle soit constructible par une méthode analogue à celles que j'ai déjà données, & obligée de passer par quelques courbes discontinuës, comme j'ai fait voir qu'on pourroit, pour un x & un y donnés à volonté trouver la verticale z correspondante, il sera possible de même de construire l'ordonnée y, étant données à volonté les abscisses x & z, en renversant la figure, & regardant le plan BAC comme horisontal. De plus la quantité a est donnée, il n'y a que l' indéterminée $\propto$ que l'on doit faire telle que la courbe Qq passe par le point donné Q; mais il est facile de remplir cette condition, en élévant par le point donné Q une verticale indéfinie, qui rencontrera la surface discontinue en un point par lequel on fera passer un plan horisontal, donc la section doit donner la courbe Qq, car ce plan étant horisontal, donne 1° z ou $V =$ constante. 2° cette constante est telle que Qq passe par le point Q, puisque le plan coupant, & par conséquent sa section passe par le point où la verticale indéfinie QM rencontre la surface donnée. Que l'on suppose aussi donnée au hazard, ou construite la surface discontinue dont l'équation est représentée par $z = W$, & soit menée par la

courbe Qq une ſurface cylindrique verticale, elle coupera la ſeconde ſurface dans une courbe dont la projection EHL ſur le plan vertical aura une équation repréſentée par $z = W'$, puiſque l'on a W' en mettant dans W à la place de y ſa valeur priſe dans $V = \propto$, & que $V = \propto$ eſt l'équation de la ſurface cylindrique. Soit de même menée par la courbe $Q'q'$ une ſeconde ſurface cylindrique verticale, elle coupera la ſeconde ſurface diſcontinuë & donnée dans une courbe dont la projection verticale ehl aura pour ſymbole d'équation $z = W'$, puiſque l'équation de cette ſeconde ſurface cylindrique eſt repréſentée par $V = a$; ſoient donc conſtruites les deux courbes EHL & ehl, il eſt évident 1° que pour tel $x = AP$ qu'on voudra, on aura $PH = W'$ & $Ph = W'$, la courbe ehl ayant lieu pour toute l'étendue de la ſurface à conſtruire, & la courbe EHL ne pouvant être employée que pour les points de la courbe qQ; 2° que ſi on prend une abſciſſe quelconque AI, & que l'on mene l'ordonnée horiſontale IT, l'on aura $IT = f.(AI)$, car on trouve la fonction f en feſant $W' = u$, & en tirant de cette équation la valeur de $x = f.u$, donc ſi l'on a $IT = x$, & par conſéquent $AI = W$, on aura $AI = u$ & $IT = f.u$. Donc ſi par le point H on mene l'horiſontale HO, & que par le point O on mene la verticale XY, on aura $AX = f(OX) = f(PH) = f.W'$. On trouvera de même AG en menant par le point k l'horiſontale kg, & en abaiſſant la verticale gG, les points X & G étant trouvés, le reſte s'achevera comme dans la conſtruction précédente.

Rémarque II

Planche II FIG. IV & V

Si la courbe $m'' M'' N$ diſcontinue & tracée au hazard étoit ſubitement interrompue en θ, la verticale XY ſeroit (je n'oſe pas dire imaginaire, par ce que cela ſuppoſeroit peût-être une expreſſion analytique) mais impoſſible, & par conſéquent la ſurface à conſtruire n'auroit aucun point qui répondit au point Q. Si la même courbe TYM'' étoit ſubitement interrompue en θ', la verticale GN ſeroit de même impoſſible, & par conſéquent toutes les ordonnées z menées par les points de la courbe Qq ſeroient auſſi impoſſibles, parceque, comme je l'ai déjà dit la verticale XY n'appartient qu'au point Q & que $Km''' - GN$ appartient à toute l'étendue de la courbe Qq.

D'après tout ce qui a été dit précédemment, il ne ſeroit pas difficile de conſtruire ſur le plan horiſontal le contour de la projection de tout ce que la ſurface à conſtruire a de réel ou de poſſible, on éviteroit par-là un grand nombre d'opérations inutiles, mais tant de quantités peuvent devenir imaginaires ou impoſſibles, que leur énumération nous meneroit ici trop loin.

AUTRE SOLUTION DU PROBLÊME V

Tirée de la conſtruction.

Soient x' & y' les coordonnées pour leſquelles il s'agit de trouver l'expreſſion de la verticale z, on fera $V = \alpha$, α étant une conſtante qu'on déterminera de telle manière qu'en feſant $x = x'$, on ait $y = y'$. On éliminera y des deux équations $V = \alpha$ & $y = \Delta . x$ ce qui donnera une valeur de x en x', y' & conſtante que je repréſente par X. On prendra la valeur de y dans $V = \alpha$, qu'on

qu'on ſubſtituera dans W, pour avoir une fonction de x, x' & y' que je repréſente par W'. On fera la même choſe pour $V = a$, & l'on aura une fonction de x, ſans x' ni y', que j'exprime par W'. On fera $W' = u$, ce qui donnera une valeur de x en u que je déſigne par fu, & la forme de la fonction f ſera connuë. On compoſera $f.W'$, & enſuite $F(fW')$, ce qui eſt facile, puiſque la fonction F eſt donnée dans les conditions ; enfin on compoſera $F(f.X')$ en mettant dans $F(f.W')$ X à la place de x, & l'équation de la ſurface demandée ſera

$$z = F(fW') + \Psi.X - F(fX')$$

après avoir mis partout x' à la place de x.

Cette opération étant dèmontrée par la conſtruction précédente, je ne m'y arrêterai pas d'avantage, mais pour faire voir l'accord des deux ſolutions, je vais appliquer celle-ci au même exemple que la précédente.

Exemple.

Soit propoſé de trouver les formes des fonctions φ & φ' ; pour que dans l'équation $z = \varphi(bx - y) + \varphi'(x + y)$ on ait 1° $z = \sqrt{Ax}$ en feſant $bx - y = a$, 2° $z = Kx$ en feſant $y = n + qx$.

Il eſt évident qu'afin que dans l'équation $bx - y = \alpha$ l'on ait $y = y'$ en feſant $x = x'$, l'on doit avoir $\alpha = bx' - y'$. Soit donc éliminé y des deux équations $y = n + qx$ & $bx - y = bx' - y'$, ce qui donnera $x = \frac{n - y' + bx'}{b - q} = X$. Soit enſuite priſe la valeur de y dans $bx - y = bx' - y'$, pour la mettre à ſa place dans $x + y$, & l'on aura $W' = x + bx - bx' - y'$. On prendra de même la valeur de y dans $bx - y = a$, qu'

on mettra dans $x \mp y$, & l'on aura $W' = x + bx - a = u$, ce qui donnera

$$x = \frac{a+u}{b+1} = f \cdot u.$$

on aura par conſéquent

$$fW' = \frac{a + x + bx - bx' + y'}{b+1}$$

& $F(fW') = \sqrt{A^{\frac{a+x+bx-bx'+y'}{b+1}}}$ par ce que $F.x = \sqrt{A.x}$ mettant X à la place de x, on trouvera

$$F(f.X') = \sqrt{A^{\frac{a + \frac{n-y'+bx'}{b-q}(b+1) - bx' + y'}{b+1}}}$$

ou bien en réduiſant

$$F(f.X') = \sqrt{A^{\frac{\frac{n-y'+bx'}{b-q}(1+q) + n + a}{b+1}}}$$

donc mettant x' à la place de x, l'équation démandée ſera

$$z = \sqrt{A^{\frac{x \; y'+a}{b+1}}} + K\frac{n-y'+bx'}{b-q} - \sqrt{A^{\frac{\frac{n\,y'+bx'}{b-q}(1+q)+n+a}{b+1}}}$$

qui eſt la même que celle que l'on a déjà trouvée en appliquant la première ſolution au même exemple

La première ſolution peût paroitre plus ſimple, mais elle n'a pas comme celle-ci l'avantage de donner directement la valeur de z en x & y, ſans avoir recours aux ſolutions des problêmes précédens.

PROBLÊME VI

Déterminer les fonctions arbitraires dans l'équation $z = K + L\varphi V + M\varphi' W$, où les quantités K, L, M, V & W sont données en x & y, de telle manière 1° qu'en faisant $V = a$, l'on ait $z = F \cdot x$, 2° qu'en faisant $y = \Delta \cdot x$ on ait $z = \psi \cdot x$.

Solution.

Soit prise dans l'équation $V = a$ la valeur de y que l'on mettra à sa place dans les quantités K, L, M, V & W, & soient K', L', M', V' & W' les fonctions de x que donne cette substitution, on aura par la première condition $F \cdot x = K' + L'\varphi a + M'\varphi' W'$, équation dans laquelle la quantité φa n'étant plus qu'une constante indéterminée il sera facile de reconnoitre la forme de la fonction φ', qui sera

$$\varphi' W' = \frac{F \cdot x - K' - L'\varphi a}{M'}$$

Soit fait actuellement $W' = u$, d'où l'on tirera la valeur de x en u, que je représente par $f \cdot u$, & l'équation précédente se transformera en celle-ci

$$\varphi' u = \frac{F(fu) - k - l\varphi a}{m}$$

Les quantités k, l, m étant les fonctions connuës de u que donne la substitution de cette valeur de x dans K', L' & M'. Soit mis W à la place de u dans les quantités k, l & m, & soient k', l' & m' les fonctions de W que l'on obtiendra, il est évident qu'en substituant à la fonction φ' sa forme que l'on vient de trouver, la proposée se transformera en celle-ci

$$z = K + L\varphi V + M\left(\frac{F(fW) - k' - l'\varphi a}{m'}\right)$$

qui ne contient plus qu'une fonction arbitraire φ, & qui rentre par conséquent dans le cas du problême II.

Il eſt vrai qu'il reſtera encore la conſtante indéterminée φa, mais lorſque l'on aura la valeur de z ſans fonctions arbitraires, il ſera facile de la déterminer. Il faut ſimplement remarquer que les conditions de la queſtion ne ſuffiſent pas pour cela, car en feſant l'opération, on s'apperçoit aiſément que quelque ſoit la quantité φa, la valeur de z ſatisfait également aux deux conditions, & par conſéquent, que l'équation finale appartient également à une infinité de ſurfaces courbes diſtinctes, dont les équations ſont de la forme de la propoſée, & qui paſſent toutes par les courbes à double courbure données. Ainſi pour déterminer celle de ces ſurfaces dont on cherche l'équation, comme il ne reſte plus d'indéterminée que la quantité φa, il faut aſſigner de plus dans l'eſpace un point par lequel elle doive paſſer, & déterminer φa de telle manière que cette condition ſoit remplie. C'eſt-à-dire que la conſtante φa doit être telle qu'en mettant dans l'équation trouvée de la ſurface, à la place de x & de y, deux conſtantes données, la valeur de z devienne égale à une autre conſtante auſſi donnée. Tout celà deviendra plus-ſenſible par un exemple.

Exemple.

Soit propoſé de déterminer les fonctions arbitraires φ & φ' dans l'équation

$$z = y\,\varphi(bx - y) + y^2\,\varphi'(x + y)$$

de façon 1° qu'en feſant $bx - y = a$, l'on ait $z = \sqrt{Bx}$, 2° qu'en feſant $y = cx$ on ait $z = p + qx$; où l'on obſervera que l'on doit avoir $p = \sqrt{B\frac{a}{b+c}} - \frac{qa}{b+c}$, afin qu'en égalant les deux valeurs données de y, ce qui donne $bx - a = cx$, on ait $\sqrt{Bx} = p + qx$ ſuivant la remarque qui ſuit le problême précédent.

En mettant dans la propoſée à la place de y ſa valeur priſe dans $bx - y = a$, elle deviendra
$\sqrt{Bx} = (bx - a)\,\varphi a + (bx - a)^2 \varphi'(x + bx - a)$
d'où, feſant $x + bx - a = u$, & réduiſant l'on tirera

$$\varphi' u = \sqrt{B\frac{(b+1)^3(a+u)}{(bu-a)^4}} - \varphi a \cdot \frac{b+1}{bu-a}$$

ſubſtituant cette forme à la place de la fonction φ' dans la propoſée, l'on aura

$$\zeta = y\varphi(bx-y) + y^2\sqrt{B\frac{(b+1)^3(a+x+y)}{(b(x+y)-a)^4}} - \frac{y^2.(b+1)}{b(x+y)-a}\varphi a$$

équation qui ne contient plus que la fonction arbitraire φ.

Soit actuellemeut miſe à la place de y ſa valeur priſe dans $y = cx$ l'on aura par la ſeconde condition

$$p + qx = cx\varphi(bx-cx) + c^2x^2\sqrt{B\frac{(b+1)^3(a+x(1+c))}{(bx(1+c)-a)^4}} - \frac{c^2x^2(b+1)}{bx(1+c)-a}\varphi a$$

d'où feſant $bx - cx = v$, l'on tirera, réduction faite

$$\varphi \cdot v = \frac{b-c}{cv}p + \frac{q}{c}cv(b-c)\sqrt{B\frac{(b+1)^3(a+\frac{v(1+c)}{b-c})}{(bv(1+c)-a(b-c))^4}} + \frac{(b+1)vc\varphi a}{bv(1+c)-a(b-c)}$$

ſubſtituant enfin cette forme dans la dernière valeur de ζ, on trouvera pour équation demandée

$$\zeta = \begin{cases} \frac{p(b-c)y}{c(bx-y)} + \frac{qy}{c}cy(bx-y)(b-c)\sqrt{B\frac{(b+1)^3\left(a+\frac{(bx-y)(1+c)}{b-c}\right)}{(b(bx-y)(1+c)-a(b-c))^4}} \\ + \frac{cy(b+1)(bx-y)\varphi a}{b(bx-y)(1+c)-a(b-c)} + y^2\sqrt{B\frac{(b+1)^3(a+x+y)}{(b(x+y)-a)^4}} \\ - \frac{y^2(b+1)\varphi a}{b(x+y)-a} \end{cases}$$

qui ſatisfait aux conditions quelque valeur que l'on donne à la conſtante indeterminée φa, puiſque ſon facteur

$y\,(b+1)\left(\frac{c(bx-y)}{b(bx-y)(1+c)-a(b-c)}-\frac{y}{b(x+y)-a}\right)$ devient $=0$, ſoit qu'on faſſe $bx-y=a$, ſoit qu'on faſſe $y=cx$; donc cette conſtante ne depend pas des conditions; donc la queſtion eſt indéterminée, & ne peut ſe particulariſer qu'en donnant une valeur de z qui reponde à des valeurs données pour x & pour y, c'eſt-à-dire, qu'en aſſignant dans l'eſpace un point pour lequel doive paſſer la ſurface. Soient donc Π, π & $\tilde{\omega}$ les trois coordonnées de ce point, il faudra donner à φa une valeur telle qu'en feſant $x=\Pi$ & $y=\pi$, l'on ait $z=\tilde{\omega}$. Ce qui n'eſt plus ſujet à aucune difficulté, & ce que je ne fairois pas ici parceque les expreſſions ſont trop diffuſes.

Conſtruction.

Conſtruire l'équation $z=K+L\varphi V+M\varphi' W$, de telle manière que la ſurface courbe, à laquelle elle appartient, paſſe par deux courbes données, continues ou diſcontinuës, qui aient pour ſymboles d'équations, la première $V=a$, $z=F\cdot x$, la ſeconde $y=\Delta\cdot x$, $z=\Psi\cdot x$, & que cette ſurface paſſe encore par un point donné dans l'eſpace, & au quel repondent les coordonnées Π, π & $\tilde{\omega}$.

Planche III FIG. VI

Soient, de même que dans la fig. 4, CAD le plan horiſontal des x & y, CAB celui des x & z, $M'm'$ & smS les courbes à double courbure données par leſquelles doit paſſer la ſurface, & dont les projections $Q'q'$, $M'm'$, rqR & $sm''m'''$ ont correſpondamment pour ſymboles d'équations $V=a$, $z=F\cdot x$, $y=\Delta\cdot x$ & $z=\Psi\cdot x$. Soit μ le point par lequel doit de plus paſſer la ſurface, & dont les projections π & μ''' ſont données, ou, ce qui revient au même, pour le quel on connoît les coordonnés $A\Pi=\Pi$, $\Pi\pi=\pi$ & $\pi\mu=\tilde{\omega}$. Soit

enfin Q le point pris à volonté ſur le plan des x & y, pour le quel il s' agit de conſtruire l' ordonnée QM de la ſurface. Cela poſé, on conſtruira la courbe $\pi\pi'$ dont l'equation eſt $V = \propto$, la conſtante $\propto$ étant telle que cette courbe paſſe par le point π, & on la prolongera juſqu' à ce qu'elle coupe quelque part la courbe rqR en un point π', par le quel on menera $\pi' k$ perpendiculaire à l' axe AC, & on élevera la verticale $k\mu''$, qu' on prolongera juſqu' à la rencontre de la courbe $sm''m'''$. On prendra dans $V = \propto$ la valeur de y qu' on ſubſtituera dans les quantités K, L, M & W, qui par-là deviendront des fonctions de x, que je ſuppoſe repreſentées par K', L', M' & W'; on prendra de même dans $V = a$ la valeur de y que l' on mettra à ſa place dans les mêmes quantités, & ſoient $K^{\backprime}$, $L^{\backprime}$, $M^{\backprime}$ & $W^{\backprime}$ les nouvelles fonctions de x que donne cette ſubſtitution. On fera $W^{\backprime} = u$, & l' on en tirera une valeur de x en u que j' exprime par $f \cdot u$, & que l' on mettra à la place de x dans $K^{\backprime}$, $L^{\backprime}$ & $M^{\backprime}$ qui par là deviendront des fonctions de u, que je déſigne reſpectivement par k, l & m. Cela fait, les fonctions k, l & m étant connuës, on les compoſera en W', c'eſt-à-dire, que l' on y mettra par tout W' à la place de u, & elles deviendront de nouvelles fonctions de x que j' indique par k', l' & m'. On conſtruira la quantité $K' + \frac{M'}{m'}(F \cdot (fW') - k')$ par la valeur de $x = Ak$ (fig. 6), & on la retranchera de la droite $k\mu''$ pour avoir une différence que je repréſente par R. On conſtruira la même quantité pour la valeur de $x = A\Pi$ & on la retranchera de la droite $\Pi\mu''' = \pi\mu$, pour avoir une ſeconde différence r. Soit Λ ce que devient L' lorſque x eſt $= Ak$, & λ lorſque l'on a $x = A\Pi$, ſoit auſſi Ω ce que devient $\frac{M'l'}{m'}$ lorſque x eſt $= Ak$, & ω lorſque x eſt $= A\Pi$, & ſoit déſigné par a le raport $\frac{r\Lambda - R\lambda}{\lambda\Omega - \Lambda\omega}$ dans

lequel toutes les quantités ſont connues & conſtructibles.

On conſtruira la courbe $Q\,q$ dont l'équation eſt $V = \alpha'$, α' étant tel que cette courbe paſſe par le point Q, & on la prolongera juſqu'à ce quelle rencontre $r\,q\,R$ en un point q, par lequel on abbaiſſera $q\,K$ perpendiculaire à l'axe $A\,C$, & on élévera la verticale $K\,m'''$. On prendra dans $V = \alpha'$ la valeur de y qu'on mettra dans K, L, M & W, ce qui donnera des fonctions de x que je indique par K'', L'', M'' & W'', on compoſera en W'' les fonctions k, l & m, en y mettant W'' à la place de u, & elles deviendront de nouvelles fonctions de x que je déſigne par k'', l'' & m''. On conſtruira la quantité $K'' + \frac{M''}{m''}\,(F(fW'') - k'' - a\,l'')$ pour une valeur de $x = A\,K$ (fig. 6) on la retranchera de la droite $K\,m'''$ & ſoit R' la différence ; enfin on conſtruira

$$K'' + \frac{R'}{\Lambda'}\,L'' + \frac{M''}{m''}\,(F(fW'') - k'' - a\,l'')$$

pour la valeur de $x = A\,P$, Λ' étant ce que devient L'' en feſant $x = A\,K$. & l'on aura la verticale $Q\,M$ demandée.

Demonſtration.

Soit imaginée par la courbe $Q\,q$ une ſurface cylindrique verticale, qui coupera la ſurface à conſtruire (pour un inſtant ſuppoſée conſtruite) en une courbe $M\,m$, qui paſſera néceſſairement par le point demande M ; ſoit élévée par le point q la verticale $q\,m$ qui rencontrera la courbe $s\,m\,S$ quelque part en un point m, par lequel doit auſſi paſſer l'interſection $M\,m$; cela fait il eſt évident que la courbe $M'''\,m'''$ projection verticale de $M\,m$ doit paſſer par le point m''', & que l'on aura ſon équation en x & z, en mettant dans celle de la ſurface, la valeur de y priſe

dans

dans l'équation de la ſurface cylindrique; or l'équation de cette dernière ſurface eſt $V = \alpha'$, donc celle de la projection verticale de l'interſection ſera

$$z = K'' + L'' A + M'' \varphi' W''$$

la conſtante A n'étant pas abſoluë, mais une certaine fonction de AP & de PQ, conſtante pour tous les points de la courbe Qq, mais variable dependamment de α', & devant être telle que la courbe $M''' m'''$ paſſe par le point déterminé m'''. Soit de même coupée la ſurface à conſtruire par une ſurface cylindrique verticale qui auroit $Q' q'$ pour baſe, il eſt clair que l'interſection ſera la courbe donnée $M' m'$, projétée verticalement en $M'' m''$; & l'on aura de même l'équation de cette projection en mettant dans la propoſée à la place de y ſa valeur priſe dans $V = a$, qui appartient à la ſurface cylindrique, on aura donc pour la courbe $M'' m''$

$$z = K' + L' a + M' \varphi' W'.$$

Mais par les conditions, on a auſſi pour la même courbe $z = F \cdot x$, donc on aura

$$F \cdot x = K' + L' a + M' \varphi' W'$$

& en feſant $W' = u$, d'où l'on tire $x = fu$, on aura $\varphi' u = \frac{F(fu) - k - la}{m}$, ce qui fait connoitre la forme de la fonction φ', qui miſe à ſa place dans l'équation de la courbe $M''' m'''$ la transforme en celle-ci $z = K'' + L'' A + \frac{M'}{m''} (F.(f \cdot W'') - k'' - l'a)$ qui ne contient plus de fonctions arbitraires, mais ſimplement les deux conſtantes indéterminées A & a, dont la première eſt une conſtante rélative, fonction de α', comme je l'ai déjà dit, & dont l'autre eſt une conſtante abſoluë, fonction de a, & qui doit être déterminée de telle manière que la ſurface paſſe par le point donné μ. Soit enfin imaginée une troiſiéme ſurface cylindrique verticale, & qui

ait $\pi\,\pi'$ pour baſe, elle coupera la ſurface à conſtruire dans une courbe $\mu\,\mu'$, qui paſſera évidemment par le point donné μ, & dont la projection verticale paſſera par les deux points déterminés μ''' & μ''. En feſant le même raiſonnement que pour la courbe $M'''\,m'''$, on trouvera que l'équation de celle-ci doit être

$$\zeta = K' + L'\,A' + \frac{M'}{m'}\,(F(fW') - k' - a\,l')$$

où la quantité a eſt la même que précédemment, mais où A' eſt une conſtante indéterminée, fonction de α; ces deux conſtantes devant être telles que la courbe paſſe par les deux points déterminés μ''' & μ''. Il faut donc qu'en conſtruiſant d'abord pour une valeur de $x = A\,k$ cette valeur de ζ, on trouve $\zeta = k\,\mu''$, & enſuite pour une valeur de $x = A\,\Pi$ ou trouve $\zeta = \Pi\,\mu'''$. Donc ſi l'on conſtruit $K' + \frac{M'}{m'}\,(F(fW') - k')$ pour le point Π, on aura $r = \lambda\,A' - a\,\omega$, de même ſi l'on conſtruit la même quantité pour le point k, on aura $R = \Lambda\,A' - a\,\Omega$, d'où l'on tirera les valeurs de A' & de a, on aura donc $a = \frac{r\,\Lambda - R\,\lambda}{\lambda\,\Omega - \Lambda\,\omega}$.

Ainſi dans l'équation de la courbe $M''\,m''$, il ne reſte plus d'indéterminée que A, or elle doit être telle que pour le point K on ait $\zeta = K\,m''$, donc ſi l'on conſtruit pour ce point la quantité

$$K'' + \frac{M''}{m''}\,(F(fW'') - k'' - a\,l'')$$

on aura $R' = A\,\Lambda'$ & par conſéquent $A = \frac{R'}{\Lambda'}$, d'où il ſuit que l'équation déterminée de la courbe $M''\,m''$ eſt

$$\zeta = K'' + \frac{R'}{\Lambda'}\,L'' + \frac{M''}{m''}\,(F(fW'') - k'' - a\,l'')$$

Donc en construisant cette valeur de z pour le point P, on doit avoir la verticale $P\,M''' = Q\,M$. C. Q. F. D.

Remarque.

1° Je n'ai pas donné les constructions particulières des différentes fonctions de x que j'employe, parcequ'elles m'auroient rendu trop diffus, & qu'il n'y a aucun géomètre qui ne soit en état de les trouver.

2° J'ai supposé les différentes quantités K, L, M, V & W analytiques, mais c'étoit pour simplifier la description des opérations, car il seroit possible de construire la proposée, quand même aucune de ces quantités ne seroit analytique, & qu'elles ne pourroient être répréſentées que par les ordonnées de surfaces courbes discontinuës & données, soit executées au hazard, soit constructibles par quelque méthode analogue aux précédentes. Si je n'entre pas-ici dans ce détail, c'est que la figure devient trop compliquée, & que d'ailleurs j'ai donné dans le problême précédent un exemple de la manière dont il faudroit s'y prendre.

AUTRE SOLUTION DU MÊME PROBLÊME

Tirée de sa construction.

Soient x' & y' les coordonnées pour lesquelles il s'agit de trouver l'expression de la verticale z; on fera $V = \propto$, $\propto$ étant tel qu'en faisant $x = \Pi$ on ait $y = \pi$; on éliminera y des deux équations $V = \propto$ & $y = \Delta x$, ce qui donnera une valeur de x en constantes que je représente par ξ. On mettra dans les quantités K, L, M & W la valeur de y prise dans $V = \propto$, & elles deviendront K', L', M' & W'. On y mettra de même la va-

leur de y prise dans $V = a$, & l'on aura des nouvelles fonctions de x que j'exprime par K', L', M', & W'. on fera $W' = u$, & l'on en tirera une valeur de x en u, désignée par fu, & que l'on mettra à sa place dans les quantités K', L', & M', qui par-là deviendront des fonctions connuës de u que je représenté correspondamment par k, l, & m. On mettra dans ces dernières quantités W' à la place de u, & l'on aura des nouvelles fonctions de x que j'indique par k', l' & m', & dans l'équation

$$\zeta = K' + A L' + \frac{M'}{m'} (F(fW') - k' - a l')$$

l'on déterminera les deux constantes A & a de telle manière 1° qu'en fesant $x = \Pi$ on ait $\zeta = \tilde{\omega}$, 2° qu'en fesant $x = \xi$, on ait $\zeta = \Psi \cdot \xi$.

On mettra partout dans les quantités K', L', M', W', k', l', m' & ξ, x' à la place de Π, & y' à la place de π, & soient K'', L'', M'', W'', k'', l'', m'' & ξ' ce que deviendront respectivement ces quantités. On mettra ξ' à la place de x dans la quantité

$$K'' + \frac{M''}{m''} (F(fW'') - k'' - a l'')$$

on la retranchera de $\Psi\ \xi'$, & soit R la différence, soit aussi Λ ce que devient L'' en fesant $x = \xi'$, & l'équation demandée sera

$$\zeta = K'' + \frac{R}{\Lambda} L'' + \frac{M''}{m''} (F(fW^{v}) - k'' - a l'')$$

après avoir mis partout x' à la place de x.

APPLICATION DE CETTE SECONDE SOLUTION

Au même exemple que la première.

Dans cet exemple on a $K = o$, $L = y$, $M = y^2$, $V = b x - y$, $W = x + y$, & par conséquent $\propto = b \Pi - \pi$, d'où l'on tire $\xi = \frac{b \Pi - \pi}{b - c}$. prenant la valeur de y dans

$b x - y = b \Pi - \pi$, & la ſubſtituant on aura

$L' = b(x-\Pi)+\pi$ $\quad L' = bx - a$ $\quad fu = \frac{a+u}{b+1}$

$M' = (b(x-\Pi)+\pi)^2$ on trouvera de même $M' = (bx-a)^2$ & par conſéquent $l = \frac{bu-e}{b+1}$

$W' = x(b+1) - b\Pi + \pi$ $\quad W' = x(b+1) - a$ $\quad m = \left(\frac{bu-a}{b+1}\right)^2$

$$l' = \frac{bx(b+1) - b^2\Pi + b\pi - a}{b+1}$$

$$m' = \left(\frac{bx(b+1) - b^2\Pi + b\pi - a}{b+1}\right)^2$$

ainſi l'équation $z = K' + AL' + \frac{M'}{m'}(F(fW') - k' - al')$ deviendra

$$z = A(bx-a) + (bx-a)^2 \frac{\sqrt{B\frac{a+x(b+1)-b\Pi+\pi}{b+1}} - a\left(\frac{bx(b+1)-b^2\Pi+b\pi-a}{b+1}\right)}{\left(\frac{bx(b+1)-b^2\Pi+b\pi-a}{b+1}\right)^2}$$

où les conſtantes A & a doivent être telles que l'on ait en même tems les deux équations ſuivantes

$$(C)\ \tilde{\omega} = A(b\Pi - a) + (b\Pi - a)^2 \frac{\sqrt{B\frac{a+\Pi+\pi}{b+1}} - a\left(\frac{b\Pi+b\pi-a}{b+1}\right)}{\left(\frac{b\Pi-b\pi-a}{b+1}\right)^2}$$

$$(D)\quad p + \frac{q(b\Pi-\pi)}{b-c} = A\left(\frac{b^2\Pi-b\pi}{b-c} - a\right)$$

$$+\left(\frac{b^2\Pi-b\pi}{b-c} - a\right)^2 \frac{\sqrt{B\left(a+\frac{b\Pi-\pi}{b-c}\frac{-b\Pi+\pi}{b+1}\right)} - a\left(b\left(\frac{b\Pi-\pi}{b-c}\right) - \frac{b^2\Pi+b\pi-a}{b+1}\right)}{\left(b\left(\frac{b\Pi-\pi}{b-c}\right) - \frac{b(b\Pi-\pi)+a}{b+1}\right)^2}$$

ce qui donnera par conſéquent la valeur de a.

On trouvera auſſi

$$L'' = b(x - x') + y' \qquad l'' = \frac{bx(b+1) - b^2x' + by' - a}{b+1}$$

$$M'' = (b(x - x') + y')^2 \qquad m'' = \left(\frac{bx(b+1) - b^2x' + by' - a}{b+1}\right)^2$$

$$W'' = x(b+1) - bx' + y' \qquad \xi' = \frac{bx' - y'}{b - c}$$

réduction faite

$$R = p + \frac{q(bx' - y')}{b - c} - \frac{c^3(bx' - y')^3\sqrt{B(b+1)^3\left(\frac{a + (bx' - y')(1+c)}{b - c}\right)}}{(b(bx' - y')(1+c) - a(b-c))^3}$$

$$+ \frac{ac^3(bx' - y')^3(b+1)}{\{b(bx' - y')(1+c) - a(b-c)\}(b-c)}$$

$$\Lambda = b\left(\frac{bx' - y'}{b - c} - x'\right) + y' = c\frac{(bx' - y')}{b - c}.$$

Par conſéquent l'équation

$z = K'' + \frac{R}{\Lambda} L'' + \frac{M''}{m''}(F(fW'') - k'' - al'')$, où l'on a $K'' = 0$ & $k'' = 0$ deviendra en feſant $x = x'$

$$z = \begin{cases} \frac{p(b-c)y'}{c(bx' - y')} + \frac{qy'}{c} - \frac{cy'(bx' - y')(b-c)\sqrt{B(b+1)^3\left(\frac{a + (bx' - y')(1+c)}{b - c}\right)}}{(b(bx' - y')(1+c) - a(b-c))^3} \\ + \frac{acy'(bx' - y')(b+1)}{b(bx' - y')(1+c) - a(b-c)} + \frac{y'^2\sqrt{B(b+1)^3(a + x' + y')}}{(b(x' + y') - a)^3} \\ - \frac{ay'^2(b+1)}{b(x' + y') - a} \end{cases}$$

Equation qui eſt la même que l'on déjà trouvée dans l'application que l'on a faite de la première ſolution au même exemple, & qui en mettant pour a ſa valeur tirée des deux équations (C) & (D), ſera celle de la ſurface demandée.

J'ai déjà remarqué que ce qui facilite la solution de ce problême, c'eſt cette particularité qui entre dans les conditions, qu'en feſant $V = a$, on ait $z = F \cdot x$, la quantité V n'étant pas quelconque, mais étant priſe dans la propoſée; or les deux fonctions arbitraires φV & $\varphi' W$ n'ont rien à cet égard qui les caractériſe; donc on reſolveroit de la même manière la propoſée, ſi une des conditions étoit qu'en feſant $W = a$ on dût avoir $z = F \cdot x$, l'autre condition étant d'ailleurs générale.

Il y a encore d'autres conditions particulières pour leſquelles ce problême ſe reſout facilement; le problême ſuivant en eſt un exemple.

PROBLÊME VII

Déterminer les fonctions arbitraires dans l'équation $z = K + L\varphi V + M\varphi' W$, de telle manière 1° qu'en feſant $L = 0$ l'on ait $z = F \cdot x$, 2° qu'en feſant $y = \Delta \cdot x$, on ait $z = \Psi \cdot x$; les quantités K, L, M, V & W étant données en x & y, & les quantités $F.x$, $\Delta.x$ & Ψx étant des fonctions quelconques & données de x.

Solution.

Soit priſe la valeur de y dans l'équation $L = 0$, pour la mettre à ſa place dans les quantités K, M, V & W, & ſoient K', M', V' & W' ce qu'elles deviennent par cette ſubſtitution, il eſt clair que par la première condition l'on aura $F \cdot x = K' + M'\varphi' W'$, ou $\varphi' W' = \frac{Fx - K'}{M'}$. Soit fait $W' = u$, ce qui donne une valeur de x en u que je repréſente par $f.u$, & ſoit ſubſtituée cette valeur dans la dernière équation, on la transformera en celle-ci $\varphi' u = \frac{F(f \cdot u) - k}{m}$, k & m étant les fonctions de u que

l'on obtient en mettant dans K' & M' à la place de x ſa valeur $f \cdot u$. Soient k' & m' les fonctions en x & y que l'on a en mettant W à la place de u dans k & m, & l'on aura $\varphi' W = \frac{F(f \cdot W) - k'}{m'}$; donc la propoſée ſe transformera en

$$z = K + L\varphi V + \frac{M}{m'} (F(fW) - k')$$

dans laquelle il n'y a plus qu'une fonction arbitraire, que l'on déterminera comme dans les problêmes précédens. Pour cela, ſoient K^{ι}, L^{ι}, M^{ι}, V^{ι}, W^{ι}, ${}^{\iota}k'$ & ${}^{\iota}m'$ ce que deviennent les quantités K, L, M, V, W, k' & m' en mettant pour y ſa valeur $\Delta \cdot x$; par la ſeconde condition, la dernière équation deviendra

$$\Psi \cdot x = K^{\iota} + L^{\iota}\varphi V^{\iota} + \frac{M^{\iota}}{{}^{\iota}m'} (F(fW^{\iota}) - {}^{\iota}k')$$

d'où l'on tirera $\varphi V^{\iota} = \frac{\Psi \cdot x - K^{\iota} - \frac{M^{\iota}}{{}^{\iota}m'} (F(fW^{\iota}) - {}^{\iota}k')}{{}^{\iota}L}$.

Soit fait $V^{\iota} = v$, ſoit $x = f' v$ la valeur de x que donne cette équation, & ſoient $K^{\prime\prime}$, $L^{\prime\prime}$, $M^{\prime\prime}$, $W^{\prime\prime}$, ${}^{\prime\prime}k'$ & ${}^{\prime\prime}m'$ ce que deviennent les quantités K^{ι}, L^{ι}, M^{ι}, W^{ι}, ${}^{\iota}k'$ & ${}^{\iota}m'$, en mettant $f' v$ à la place de x, & la dernière équation ſe transformera en celle-ci

$$\varphi v = \frac{\Psi(f' v) - K^{\prime\prime} - \frac{M^{\iota}}{{}^{\iota}m'} (F(fW^{\prime\prime}) - {}^{\prime\prime}k')}{{}^{\prime\prime}L}$$

qui fera connoitre la forme de la fonction $\varphi \cdot v$. Soit donc mis V à la place de v dans le ſecond membre de cette équation, & ſoient $K^{\prime\prime\prime}$, $L^{\prime\prime\prime}$, $M^{\prime\prime\prime}$, $W^{\prime\prime\prime}$, ${}^{\prime\prime\prime}k'$ & ${}^{\prime\prime\prime}m'$ ce qu'en deviennent tous les termes par cette ſubſtitution, il eſt évident que l'équation demandée ſera

D'après

$$\zeta = K + \frac{L}{''L}(\Psi(fV) - K'' - \frac{M''}{''m'}(F(fW'') - ''k')) + \frac{M}{m'}(F(fW) - k')$$

C. Q. F. T.

D'aprés tout ce qu'on a vû juſqu'ici, la conſtruction de ce problême n'a rien qui doive arrêter. De plus, il eſt facile d'apperçevoir que ce problême ſe reſolveroit de la même maniére, ſi la première condition étoit, qu'en feſant $M = o$ on dût avoir $\zeta = Fx$.

PROBLÊME VIII.

Déterminer quelles doivent être les formes des fonctions arbitraires φ, φ', $\varphi'' \cdots$ &c. dans l'équation
$\zeta = H + K\varphi V + L\varphi' W + M\varphi'' W + N\varphi''' W \cdots$ &c.

pour qu'en feſant $1^o\ W = a$, l'on ait $\zeta = F \cdot x$,
$2^o\ y = \Delta \cdot x$, ... $\zeta = \Psi \cdot x$
$3^o\ y = \Delta' \cdot x$ . . . . $\zeta = \Psi' \cdot x$
$4^o\ y = \Delta'' x$ . . . . $\zeta = \Psi'' x$
&c. &c.

le nombre des conditions étant égal à celui des fonctions arbitraires, les quantités H, K, L, M, N, V & W étant données en x & y, & les fonctions $F, \Delta, \Delta', \Delta'' \cdots$ &c., $\Psi, \Psi', \Psi'' \ldots$ &c. étant de formes connuës.

Solution.

Soit priſe dans $W = a$ la valeur de y que l'on mettra à ſa place dans les quantités $H, K, L, M, N \ldots$ & V, & ſoient $H', K', L', M', N' \ldots$ & V' les fonctions de x que donne cette ſubſtitution, on aura par la première condition

$F \cdot x = H' + K'\varphi V' + L'A + M'B + N'C \ldots$ &c.

équation dans laquelle les conſtantes $A, B, C \ldots$ &c.

ſont des conſtantes indéterminées & qui donne

$$\varphi V' = \frac{F \cdot \varkappa - H' - L' A - M' B - N' C \ldots \&c.}{K'}$$

Soit fait actuellement $V = u$, & ſoit tirée de cette équation la valeur de x en u que je repréſente par $f \cdot u$, ſoit miſe cette valeur dans H', K', L', M', $N' \ldots$ &c. & ſoient h, k, l, m, $n \ldots$ &c. les fonctions de u que deviennent reſpectivement ces quantités, l'équation précédente ſe transformera en celle-ci

$$\varphi u = \frac{F(f \cdot u) - h - a l, - B m - C n \ldots . \&c.}{k}$$

Dans laquelle on connoitra la forme de la fonction φ, qui, miſe à ſa place dans la propoſée, la rendra, de la même forme que celle du problême IV, & par conſéquent traitable par la même méthode.

Quant aux indéterminées A, B, $C \ldots$ &c. qui reſtent après l'opération, elles indiquent que les conditions du problême, contenuës dans l'énoncé, ne ſuffiſent pas pour déterminer la ſurface à laquelle appartient l'équation, mais qu'il faut encore donner outre cela autant de points dans l'eſpace par leſquels doive paſſer cette ſurface, qu'il y a des quantités arbitraires, fonctions de W, dans la propoſée.

Cette ſolution eſt trop ſimple par elle même pour avoir beſoin d'être éclaircie par un exemple.

Remarque.

Quoique les fonctions $F, \Delta, \Delta', \Delta'', \ldots \Psi \Psi' \Psi'' \ldots$ &c. puiſſent être de formes quelconques, il faut néantmoins, pour qu'il n'y ait point de conſtruction dans les conditions, que,

X étant la valeur de x que l'on a en éliminant y des deux équations $W = a$ & $y = \Delta . x$,

X' celle que l'on a en éliminant y des équations
$W = a$ & $y = \Delta' x$,
X'' Celle que l'on a en éliminant y des équations
$W = a$ & $y = \Delta'' x$
&c. &c.
l'on ait $F \cdot X = \Psi X$,
$F \cdot X' = \Psi' X'$,
$F \cdot X'' = \Psi'' X''$
&c. &c.

Ceci eſt analogue à la remarque du problême V, & paroitra d'ailleurs évident par la conſtruction ſuivante

Conſtruction.

Conſtruire l'équation $\zeta = H + K\phi V + L\phi' W + M\phi'' W + N\phi''' \ldots$ &c. De telle manière que la ſurface à laquelle elle appartient paſſe par autant de courbes à double courbures données, continuës ou diſcontinuës, qu'il y a de fonctions arbitraires dans l'équation, les ſymboles d'équations de ces courbes étant

pour la première $W = a$ & $\zeta = F \cdot x$
pour la ſeconde $y = \Delta \cdot x$ & $\zeta = \Psi \cdot x$
pour la troiſième $y = \Delta' \cdot x$ & $\zeta = \Psi' \cdot x$
pour la quatrième $y = \Delta'' x$ & $\zeta = \Psi'' x$
&c. &c.

& que cette ſurface paſſe encore par autant de points donnés dans l'eſpace, qu'il y a de fonctions de W dans la propoſée, en ſorte que Π, π & $\tilde{\omega}$ ſoient les coordonnées du premier de ces points Π', π' & $\tilde{\omega}'$ celles du ſecond, Π'', π'' & $\tilde{\omega}''$ celles du troiſième & ainſi de ſuite.

Pour ſimplifier la deſcription des opérations, 1° j'ai ſuppoſé dans la figure que le nombre des fonctions arbitraires & par conſéquent celui des courbes à double courbure données, ne fût pas plus grand que quatre, mais il ſera

facile d'appercevoir que, quelque grand que pût être ce nombre, les opérations, pour être plus longues, n'en seroient pas plus difficiles. 2° je regarderai comme analytiques toutes les quantités $H, K, L, M, N, \cdots V \& W$, quoique la proposée fût constructible, dans le cas même où toutes les quantités seroient discontinuës, & ne pourroient se représenter que par les ordonnées verticales des surfaces courbes discontinuës, soit executées au hazard, soit construites comme celles des problêmes précédens. Si je ne construis pas le problême dans cette généralité, c'est que la figure deviendroit d'une énorme complication, & que d'ailleurs j'ai donné dans le problême V un exemple de la manière dont on doit opérer sur ces quantites. Je supposerai donc seulement les fonctions $F, \Delta, \Delta', \Delta'' \cdots \Psi \Psi' \Psi'' \cdots$ &c. discontinuës.

Planche IV FIG. VII

Enfin, pour abbréger je vais donner la construction telle qu'elle n'ait pas besoin de démonstration. Soient CAD le plan horisontal des x & y, & BAC celui des x & z, que $\mu^{IV} M^{IV} m^{IV}$ soit la courbe dont les projections ont pour symboles d'équations $W = a$, $z = F \cdot x$, & soient $K^{IV} Q^{IV} q^{IV} . N^{IV} \mathcal{N}^{IV} n^{IV}$ ces projections. Soient $\mu^{IV} \mu \mu' \mu'' \mu'''$ la courbe dont les projections $K^{IV} K K' K'' K'''$ & $N^{IV} N N' N'' N'''$ ont leurs équations représentées par $y = \Delta \cdot x$ & $z = \Psi \cdot x$: $\mathcal{M}^{IV} \mathcal{M} \mathcal{M}' \mathcal{M}'' \mathcal{M}'''$ celle dont les projections $Q^{IV} Q Q' Q'' Q'''$ & $\mathcal{N}^{IV} \mathcal{N} \mathcal{N}' \mathcal{N}'' \mathcal{N}'''$ ont pour équations $y = \Delta' \cdot x$ & $z = \Psi' \cdot x$, $m^{IV} m m' m'' m'''$ celle dont les projections $q^{IV} q q' q'' q'''$ & $n^{IV} n n' n'' n'''$ ont pour équation $y = \Delta'' x$ & $z = \Psi'' x \cdots$ & ainsi de suite. Il est évident, puisque toutes ces courbes sont sur la même surface, qu'au point K^{IV} l'ordonnée verticale de la courbe $\mu^{IV} \mathcal{M}^{IV} m^{IV}$ & celle de la courbe $\mu^{IV} \mu \mu' \mu'' \mu'''$

doivent être égales : que de même au point Q^{IV}, celle de la première courbe & celle de la courbe $\mathcal{M}^{IV}\,\mathcal{M}\,\mathcal{M}'\,\mathcal{M}''\,\mathcal{M}'''$ doivent être égales : qu'au point q^{IV} celle de la même courbe & celle de $m^{IV}\,m\,m'\,m''\,m'''$ doivent être égales : ... & ainſi de ſuite. C'eſt le ſujet de la remarque précédente.

Soient E, F, G .... *&c.* les points donnés par leſquels doit paſſer la ſurface, & dont le nombre eſt égal à celui des arbitraires, fonctions de W, contenuës dans la propoſée, de manière que l'on ait

$$A\,P' = \Pi \quad A\,P'' = \Pi' \quad A\,P''' = \Pi''$$
$$P'\,Q' = \pi \quad P''\,Q'' = \pi' \quad P'''\,Q''' = \pi''$$
$$Q'\,E = \tilde{\omega} \quad Q''\,F = \tilde{\omega}' \quad Q'''\,G = \tilde{\omega}''$$

Soient E', F', G' .... *&c.* leurs projections verticales. Enfin ſoient $A\,P$ & $P\,Q$ les deux coordonnées x & y données à volonté, pour leſquelles il s'agit de conſtruire la verticale $Q\,M = z$. Cela poſé, on conſtruira la courbe $K\,Q\,q$ qui ait pour équation $W = \alpha$, α étant tel que cette courbe paſſe par le point déterminé Q ; cette courbe coupera les projections horiſontales des courbes données en des points $K\,Q\,q$ ... *&c.* par leſquels on abbaiſſera des perpendiculaires ſur l'axe $A\,C$ qui le rencontreront en des points p, π, $\tilde{\omega}$ ... *&c.* par leſquels on élévera des verticales $p\,N$, $\pi\,\mathcal{N}$, $\tilde{\omega}\,u$ ... *&c.*, qu'on terminera aux projections verticales des courbes correſpondantes. Soient imaginées par les points $K\,Q\,q$ ... *&c.* des verticales terminées aux courbes à double courbure correſpondantes, il eſt clair que l'on aura $p\,N = K\,\mu$, $\pi\,\mathcal{N} = Q\,\mathcal{M}$, $\tilde{\omega}\,n = q\,m$ ... *&c.*

Que l'on imagine une ſurface cylindrique verticale qui ait la courbe $K\,Q\,q$ ... pour baſe, elle coupera la ſurface à

conſtruire, & ſuppoſée pour un inſtant conſtruite, en une courbe $\mu \mathcal{M} m$, qui paſſera évidemment par le point demandé M, & de la projection verticale de laquelle on aura l'équation en mettant à la place de y dans la propoſée, ſa valeur priſe dans $W = \propto$, qui appartient à cette ſurface cylindrique. Soit $N \mathcal{N} n$ cette projection verticale, & $H', K', L', M', N' \cdots V'$ les fonctions de x que l'on obtient en mettant dans $H, K, L, M, N \cdots$ & V la valeur de y dont on vient de parler, il eſt clair que l'équation de la courbe $N \mathcal{N} n$ ſera

$$(A)\ Z = H' + K' \varphi V' + L' \varphi' \propto + M' \varphi'' \propto + N' \varphi''' \propto \cdots \&c.$$

qui ne contient plus qu'une fonction arbitraire $\varphi V'$, puiſque les quantités $\varphi' \propto$, $\varphi'' \propto$, $\varphi''' \propto \ldots$ ſont des conſtantes indéterminées, & qui doivent être telles que la courbe $N \mathcal{N} n$ paſſe par les points détérminés $N, \mathcal{N}, n \ldots \&c.$

Il faut ſimplement remarquer que ces indéterminées ne ſont conſtantes que pour toutes les verticales $Q M$ qui paſſent par la courbe $K Q q$, pour laquelle on a $\propto =$ conſtante, mais qu'elles ſeroient variables dans le paſſage de ces verticales à d'autres pour leſquelles la quantité $\propto$ ſeroit différente. Ce ne ſont à proprement parler que des conſtantes relatives.

Or la fonction $\varphi V'$ doit être de telle forme que ſi la courbe $K Q q$ étoit la même que $K'' Q'' q''$, c'eſt-à dire que ſi l'on avoit fait $\propto = a$, on eut

$$F \cdot x = z = H' + K' \varphi V' + L' \varphi' \propto + M' \varphi'' \propto + N' \varphi''' \propto \cdots \&c.$$

Soient donc $H', K', L', M', N' \ldots V'$ Les nouvelles fonctions de x que l'on trouve en mettant à la place de $\propto$ dans $H', K', L', M', N' \ldots V'$, ou ce qui revient au même en mettant dans $H, K, L, M, N \ldots V$ à la place

de y ſa valeur priſe dans l'équation $W = a$. on aura
$F \cdot x = H' + K' \varphi V' + L' \varphi' a + M' \varphi'' a + N' \varphi''' a \cdot \ldots$ &c.
d'où l'on tirera $\varphi V' = \frac{F \cdot x - H' - L' \varphi' a - M' \varphi'' a - N' \varphi''' a \cdots \&c.}{K'}$

Equation dans laquelle les quantités $\varphi' a$, $\varphi'' a$, $\varphi''' a \ldots$ &c. ſont des conſtantes abſoluës, puiſque a eſt une conſtante donnée par les conditions.

Soit fait actuellement $V' = u$, & ſoit $x = f \cdot u$ la valeur de x que donne cette équation, on ſubſtituera cette valeur dans les quantités $F \cdot x$, H', L', M', $N' \ldots K'$, qui deviendront des fonctions connuës de u, que je repréſente correſpondamment par $F(f \cdot u)$, h, l, m, $n \ldots k$ & l'on aura $\varphi u = \frac{F(fu) - h - l \varphi' a - m \varphi'' a - n \varphi''' a}{k}$

D'où il ſuit qu'aux conſtantes près $\varphi' a$, $\varphi'' a$, $\varphi''' a \ldots$ &c. qui reſtent indéterminées, la forme de la fonction φ ſera connuë. On la ſubſtituera à ſa place dans l'équation (A), & l'on aura la valeur de z en x, c'eſt-à-dire l'équation de la courbe $N \mathcal{N} n$ ſans fonctions arbitraires. Pour cela ſoit

mis V' à la place de u dans les quantités k, h, l, m, $n \ldots$ &c. & ſoient repréſentées par k', k', l', m', $n' \ldots$ &c. les nouvelles fonctions de x que donne cette opération on aura $\varphi V' = \frac{F(fV') - h' - l' \varphi' a - m' \varphi'' a - n' \varphi''' a}{k'}$

d'où il ſuit que l'équation (A) deviendra

(B) $z = H' + \frac{K'}{k'} (F(fV') - h' - l' \varphi' a - m' \varphi'' a - n' \varphi''' a \ldots$ &c.)
$+ L' \varphi' \propto + M' \varphi'' \propto + N' \varphi''' \propto \ldots$. &c. où les fonctions indéterminées de a ſont des conſtantes abſoluës qui dépendent de la poſition des points donnés E, F, $G \ldots$ &c. & où les fonctions indéterminées de $\propto$ dependent de la poſition des points $N \mathcal{N} n \ldots$ &c. Or ces derniers points

ſont toujours les mêmes tant que $\propto$ ne varie point, c'eſt-à-dire tant que le piè de l'ordonnée QM ſe trouve ſur la même courbe KQq; mais il changent de poſition lorſque $\propto$ varie, quoique d'ailleurs ils doivent toujours ſe trouver correſpondamment ſur les courbes $N^{IV}NN'N''N'''\ldots$ $\mathcal{N}^{IV}\mathcal{N}\mathcal{N}'\mathcal{N}''\mathcal{N}'''\ldots n^{IV}\,n\,n'\,n''\,n'''\ldots$

Cette valeur de z ne peut ſe conſtruire que l'on n'ait au paravant conſtruit toutes les indéterminées $\varphi' a$, $\varphi'' a$, $\varphi''' a \ldots \varphi' \propto$, $\varphi'' \propto$, $\varphi''' \propto \ldots$ &c., en commençant par les fonctions de a,

Pour cela, ſoit conſtruite la courbe $K'Q'q'$ dont l'équation eſt $W = \propto'$, $\propto'$ étant tel que cette courbe paſſe par le point donné Q', ou qu'en feſant $x = \Pi$, on ait $y = \pi$; & par les points $K', Q', q' \ldots$ &c. ou elle coupe les projections horiſontales des courbes données, ſoient menées des perpendiculaires à l'axe AC, qui le rencontreront en des points $p', \pi', \tilde{\omega}' \ldots$, par leſquels ſoient élévées les verticales $p'N', \pi'\mathcal{N}', \tilde{\omega}'n', \ldots$ qu'on terminera aux projections verticales correſpondantes en $N', \mathcal{N}', n' \ldots$ &c.

Soient auſſi élévées par les points $K', Q', q' \ldots$ des verticales qu'on terminera en $\mu', \mathcal{M}', m' \ldots$ aux courbes à double courbure correſpondantes. Cela fait, que l'on imagine par la courbe $K'Q'q' \ldots$ une ſurface cylindrique verticale, elle coupera la ſurface à conſtruire, ſuppoſée pour un inſtant conſtruite, en une courbe $\mu'\mathcal{M}'m'$, qui paſſera par le point donné E, & dont la projection verticale $N'\mathcal{N}'n'$ paſſera par les points déterminés $N'\mathcal{N}'n' \ldots$, en même tems que par le point E', projection verticale du

du point E. Or, puiſque cette courbe eſt déterminée par les mêmes procédés que la courbe $N\mathcal{N}n$, & qu'elle n'en différe que parceque l'on a fait $W = \propto'$ au lieu de $W = \propto$, on aura ſon équation en mettant partout dans l'équation (B) $\propto'$ à la place de $\propto$. Soient donc $H^{\text{IV}}, K^{\text{IV}}, L^{\text{IV}}, M^{\text{IV}}, N^{\text{IV}} \ldots V^{\text{IV}}, {}^{\text{IV}}k, {}^{\text{IV}}h, {}^{\text{IV}}l, m^{\text{IV}}, n^{\text{IV}} \ldots$ &c. ce que deviennent les fonctions de x $H', K', L', M', N' \ldots V', {}'k, {}'h, {}'l, m', n' \ldots$ &c. en y mettant $\propto'$ à la place de $\propto$, & l'équation de la projection $N\mathcal{N}'n'$ ſera

$$(C)\ \zeta = H' + \frac{K''}{{}''k}\left(F(fV'') - h'' - l''\varphi' a - m''\varphi'' a - n''\varphi''' a \ldots\right)$$
$$+ L''\varphi' \propto' + M''\varphi'' \propto' + N''\varphi''' \propto' \ldots \text{ \&c.}$$

où les conſtantes, fonctions indéterminées de a ſont les mêmes que dans l'équation (B), mais où les fonctions de $\propto'$ doivent être telles que la courbe $N', \mathcal{N}', n'$ paſſe par les points $N', \mathcal{N}', n' \ldots$ &c.

Soit donc conſtruite la quantité $H' + \frac{K'}{{}'k}\left(F(fV'') - {}'h\right)$ pour une valeur de $x = \Pi = AP$, & ſoit retranchée de $PE'\ (= \tilde{\omega})$ la droite dont cette quantité eſt l'expreſſion, pour avoir un premier reſte, que je repréſente par R, il eſt clair que l'on aura l'équation ſuivante

$$(D)\ R = \frac{K''}{{}''k}\left(-{}''l\varphi' a - m''\varphi'' a - n''\varphi''' a \ldots \text{ \&c.}\right)$$
$$+ L''\varphi' \propto' + M''\varphi'' \propto' + N''\varphi''' \propto' \ldots \text{ \&c.}$$

x étant fait $= \Pi = AP$.

Soit conſtruite la même quantité $H'' + \frac{K'}{{}'k}\left(F(fV'') - h''\right)$ pour la valeur de $x = Ap'$, & qu'on la retranche de $p'N'$ pour avoir un ſecond reſte R', on aura une ſeconde équation.

$$(E)\ R' = \frac{K'}{k''}\ (-l''\varphi' a - m''\varphi'' a - n''\varphi''' a \ldots \&c.)$$
$$+ L''\varphi'\ \alpha' + M''\varphi''\ \alpha' + N''\varphi'''\ \alpha' \ldots \&c.$$
x étant fait $= A p'$

On conſtruira la même quantité pour la valeur de $x = A\pi'$, & on la retranchera de $\pi'\mathcal{N}'$, ce qui donnera un troiſième reſte R'' & par conſéquent une troiſième équation

$$(F)\ R'' = \frac{K''}{k''}\ (-l''\varphi' a - m''\varphi'' a - n''\varphi''' a \ldots \&c.)$$
$$+ L''\varphi'\ \alpha' + M''\varphi''\ \alpha' + N''\varphi'''\ \alpha' \ldots \&c.$$
x étant fait $= A\pi'$

On conſtruira la même quantité pour la valeur de $x = A\tilde{\omega}'$, on la retranchera de la verticale $\tilde{\omega}' n'$, ce qui donnera un quatrième reſte R''', & par conſéquent une quatrième équation.

$$(G)\ R''' = \frac{K''}{k''}\ (-l''\varphi' a - m''\varphi'' a - n''\varphi''' a \ldots \&c.)$$
$$+ L''\varphi'\ \alpha' + M''\varphi''\ \alpha' + N''\varphi'''\ \alpha' \ldots \&c.$$
x étant fait $= A\tilde{\omega}'$

En continuant ainſi de ſuite, juſqu'à ce qu'on ait opéré pour tous les points N', $\mathcal{N}'$, $n' \ldots \&c.$ dont le nombre eſt égal à celui des fonctions arbitraires φ', φ'', $\varphi''' \ldots \&c.$, on aura autant d'équations & une de plus qu'il y a d'indéterminées fonctions de α' dans l'équation (C); on les eliminera, & il reſtera par conſéquent une première équation en $\varphi' a$, $\varphi'' a$, $\varphi''' a \ldots$ & conſtantes.

Il faut bien remarquer que les ſeconds membres des équations (D), (E), (F), $(G) \ldots \&c.$ ne ſont pas les mêmes quoi qu'il ſoient exprimés par les mêmes caractères, il ſont tous des conſtantes différentes, & on trouve le premier, en donnant à x la valeur AP, le ſecond, en feſant

$x = Ap' \ldots$ &c. J'ai été obligé d'employer ici les mêmes caractères pour des quantités différentes, pour ne pas trop en multiplier la variété.

On conſtruira la courbe $K'' Q'' q''$, dont l'équation eſt $W = \propto''$, $\propto''$ étant tel que cette courbe paſſe par le point donné Q'', ou qu'en feſant $x = \Pi'$ on ait $y = \pi'$, par les points K', Q'', $q'' \ldots$ &c. par leſquels elle coupera les projections horiſontales des courbes données, on abbaiſſera des perpendiculaires à l'axe AC, qui le rencontreront aux points $p'' \pi'' \tilde{\omega}'' \ldots$ &c. par leſquels on élévera les verticales $p'' N''$, $\pi'' \mathcal{N}''$, $\tilde{\omega}'' n'' \ldots$ &c. qui détermineront les points N'', $\mathcal{N}''$ $n'' \ldots$ &c. On imaginera par la courbe $K'' Q'' q''$ une autre ſurface cylindrique verticale qui coupera la ſurface à conſtruire dans une autre courbe $\mu'' M'' m''$, qui paſſera par le point donné F, & dont la projection verticale $N'' \mathcal{N}'' n''$ paſſera néceſſairement par les points N'', $\mathcal{N}''$, $n'' \ldots$ &c. ainſi que par le point F'.

On fera pour cette courbe les mêmes opérations que l'on a faites ſur la courbe $N' \mathcal{N}'$, n', & l'on trouvera un même nombre d'équations analogues aux équations (D), (E), (F), $(G) \ldots$ en $\varphi' a, \varphi'' a, \varphi''' a \ldots \varphi' \propto''$, $\varphi'' \propto''$, $\varphi''' \propto''$; on éliminera les fonctions de $\propto''$, & l'on aura une ſeconde équation en $\varphi' a$, $\varphi'' a$, $\varphi'' a \ldots$ & conſtantes.

On conſtruira la courbe $K''', Q''' q'''$ dont l'équation eſt $W = \propto'''$, $\propto'''$ étant tel que cette courbe paſſe par le point donné Q''', & l'on fera pour elle les mêmes opérations que celles que l'on a faites pour les courbes $K' Q' q'$ & $K'' Q'' q''$, & l'on parviendra à une troiſième équation en $\varphi' a$, $\varphi'' a$, $\varphi''' a \ldots$ & conſtantes.

En continuant ainſi de ſuite, on trouvera entre les quantités $\varphi' a$, $\varphi'' a$, $\varphi''' a$ ... &c. autant d'équations qu'il y a de points donnés Q', Q'', Q''' ... &c., c'eſt à-dire qu'il y a de fonctions arbitraires de W dans la propoſée, ou qu'il y a d'indéterminées fonctions de a dans l'équation (B). On pourra donc trouver la valeur de chacune d'elles en particulier, & les conſtruire toutes. Ainſi dans l'équation (B) il ne reſtera plus à déterminer que les fonctions indéterminées de $\propto$.

Or on a déjà vû que ces conſtantes doivent être telles que la courbe $N \mathcal{N} n$, à laquelle appartient cette équation, paſſe par les points déterminés N, $\mathcal{N}$, n ... &c.

Soit donc conſtruite la quantité

$$H' - \frac{K}{k}(F(fV') - h' - l'\varphi' a - m'\varphi'' a - n'\varphi''' a \ldots \&c.)$$

pour la valeur de $x = Ap$, & après avoir mis à la place de $\varphi' a$, $\varphi'' a$, $\varphi''' a$ ... &c. leurs valeurs que l'on vient d'enſeigner à trouver. Soit retranchée la droite dont elle eſt l'expreſſion de la verticale pN, ce qui donnera un premier reſte que j'exprime par r, & l'on aura

$$r = L'\varphi' \propto + M'\varphi'' \propto + N'\varphi''' \propto \ldots \&c.,$$

x étant fait $= Ap$.

On conſtruira la même quantité pour une valeur de $x = A\pi$, on la retranchera de la verticale $\pi \mathcal{N}$, ce qui donnera un ſecond reſte r', & l'on aura une ſeconde équation

$$r' = L'\varphi' \propto + M'\varphi'' \propto + N'\varphi''' \propto \ldots \&c.$$

x étant fait $= A\pi$.

On conſtruira la même quantité pour la valeur de $x = A\tilde{\omega}$, on la retranchera de la verticale $\tilde{\omega} n$, ce qui donnera un troiſième reſte r''. & l'on aura une troiſième équation

$r'' = L\varphi' \propto + M\varphi'' \propto + N\varphi''' \propto \cdots$ &c.
x étant fait $= A\tilde{\omega}$.

En continuant ainſi de ſuite, on parviendra à avoir autant d'équations en $\varphi' \propto$, $\varphi'' \propto$, $\varphi''' \propto \cdots$ &c. & conſtantes qu'il y a de points déterminés N, $\mathcal{N}$, $n \cdots$ par leſquels doit paſſer la courbe $N\,\mathcal{N}\,n$, c'eſt-à-dire, autant qu'il y a de fonctions indéterminées de $\propto$ dans l'équation (B). Il ſera donc poſſible de trouver la valeur de chacune d'elles en particulier, & les conſtruire; on pourra par conſéquent conſtruire l'équation (B), c'eſt-à-dire la courbe $N\,\mathcal{N}\,n$.

Enfin cette courbe étant conſtruite, on élévera par le point P la verticale $P\,M'$ qu'on terminera à la courbe $N\,\mathcal{N}\,n$, on fera $Q\,M = PM'$, & le point M ſera dans la ſurface demandée. C. Q. F. T. & D.

On me reprochera peut-être d'employer du calcul dans une conſtruction, ſur tout après avoir avancé qu'elle ſeroit poſſible, quand même il n'y auroit dans la propoſée aucun facteur analytique, mais j'ai été obligé d'avoir recours à ce moyen pour abréger des détails qui auroient conſidérablement allongé la deſcription des opérations, d'ailleurs le nombre des courbes qu'il eut fallu faire entrer dans la figure pour ſuppléer au calcul, l'eut tellement compliquée qu'il eut été difficile de s'y reconnoitre. Néant-moins toutes les opérations analytiques ne tombent que ſur les quantités que j'ai ſuppoſé analytiques au commencement de la conſtruction. De plus une droite, dont l'expreſſion n'eſt pas analytique, étant conſtruite, on peut en meſurer l'étenduë à l'aide d'une échelle, & la faire entrer dans le

calcul. J'avouë que ce moyen eſt peu géométrique & inuſité dans les conſtructions, & que ce problême ne peut pas être conſtruit plus élégamment que par la méthode que j'ai expoſée dans la remarque qui ſuit la conſtruction du problême V.

Je pourrois donner ici, comme dans les problêmes précédens une ſeconde ſolution analytique, indépendante de la première, & tirée de la conſtruction, mais, après tout ce qui précéde, elle eſt trop facile pour que je m'y arête d'avantage.

SECOND MÉMOIRE

Sur le calcul intégral de quelques équations aux différences partielles.

PAR M.r MONGE.

Indépendamment de l' utilité du calcul intégral des équations aux différences partielles pour la détermination du mouvement des fluides & des vibrations des corps élaſtiques, cette eſpece de calcul eſt encore néceſſaire à la ſolution d'un grand nombre d'autres beaux problêmes, & particulièrement de ceux qui ont pour objet de trouver une ſurface courbe qui jouiſſe d'un *maximum* ou d'un *minimum*. Si l'on ſe propoſe, par exemple, de trouver en trois coordonnées l'équation de la ſurface courbe qu'il faut donner aux aîles d'un moulin à vent, pour que, muës par l' impulſion du vent, & parvenuës à l' uniformité de mouvement, elles aïent la plus grande vîteſſe poſſible, on parvient à une équation aux différences partielles qu' il faut intégrer afin d'avoir la rélation demandée entre les trois coordonnées. Il en eſt de même pour l'équation de la ſurface de moindre réſiſtance; car les ſolutions que l'on a données juſqu'à préſent du ſolide de moindre réſiſtance ſont imparfaites, & ne peuvent être d'ailleurs d'aucune utilité pour la conſtruction des vaiſſeaux. On a toujours, en effet, ſuppoſé 1.° que ce ſolide étoit un ſolide de révolution, 2.° qu'il étoit entièrement ſubmergé par le fluide réſiſtant, hypothêſes qui ne peuvent pas avoir lieu dans la pratique. Pour que l'on pût rétirer quelqu'avantage de la ſolution de ce problême, voici comme il faudroit l'énoncé.

Etant données la maitreſſe couple d'un vaiſſeau, ou ſa coupe en travers dans l'endroit où il eſt le plus gros, & ſa coupe horiſontale par le plan de la ſurface de l'eau, trouver parmi toutes les ſurfaces courbes qui peuvent paſſer par ces deux courbes données, continues ou diſcontinues, celle qui, mûe par l'action du vent ſur les voiles, & parvenue à l'uniformité de mouvement, ait la plus grande vîteſſe uniforme. Mais ce problême dépend de l'intégration d'une équation aux différences partielles, très compliquée, & que juſqu'à préſent j'ai vainement eſſayé de traiter.

Il faut cependant être de bonne foi, & convenir que les ſolutions des deux problêmes précédens ne ſont pas de toute l'utilité dont elles paroiſſent à l'inſpection. En effet la nature de la ſurface de l'aîle d'un moulin à vent, dépend de la vîteſſe du vent que je ſuppoſe uniforme & de la réſiſtance qu'apportent le frottement des menſes & des autres parties de la machine au mouvement de l'arbre, or ces quantités ſont ſujettes à des variations qu'il n'eſt pas poſſible de ſoumettre au calcul; d'où il ſuit que la ſurface qui donneroit le *maximum* de vîteſſe uniforme pour une certaine vîteſſe abſolue du vent, ne le donneroit plus pour une vîteſſe un peu moindre ou plus grande. De même la nature de la ſurface de moindre réſiſtance eſt aſſujétie à la vîteſſe du vent, à la direction du mouvement du vaiſſeau, à la nature de ſa coupe horiſontale par le plan de la ſurface de l'eau &c. or la vîteſſe du vent ne peut pas être ſuppoſée conſtante, du moins pendant un tems conſidérable, les oſcillations du vaiſſeau apportent des changemens inévitables & très prompts dans la coupe horiſontale; les inégalités de vîteſſe du vent, la manière variable dont il agit ſur les voiles ſujettes à différens mouvements, quand même elles auroient toujours la même poſition par rapport au vaiſſeau, empechent que l'on puiſſe regarder la direction de ſon mouvement

ment comme conſtante ; d'où il faut conclure que la ſurface qui ſatisferoit au *maximum* de viteſſe uniforme pour un inſtant, n'y ſatisferoit plus dans l'inſtant ſuivant, ou du moins que cette ſurface ne pourroit être la même que pendant un tems peu-conſidérable.

Si ces conſidérations ſont capables de nous conſoler de l'impoſſibilité ou nous ſommes pour ainſi dire de réſoudre complétement de pareils problêmes, elles ne doivent néantmoins pas nous empêcher de faire tous nos efforts pour vaincre les obſtacles, qui ſe préſentent ; d'ailleurs comme ces obſtacles ne conſiſtent que dans des difficultés d'analyſe, on peut en les ſurmontant ſe frayer une route à la ſolution de problêmes plus utiles.

Dans un mémoire que j'ai déjà eu l'honneur de préſenter à l'Académie ſur le calcul intégral des équations aux différentielles partielles, j'ai donné la manière de trouver comment la quantité ζ doit être fonction de x & de y pour ſatisfaire à cette équation

$$\frac{\delta^m \zeta}{dx^m} + A\frac{\delta^{m-1} d\zeta}{dx^{m-1}dy} + B\frac{\delta^{m-2} d\, d\zeta}{dx^{m-2}dy^2} + C\frac{\delta^{m-3} d^3\zeta}{dx^{m-3}dy^3} \ldots \&c. = K,$$

δ étant la caractériſtique d'une différentielle priſe en ne feſant varier que x, & d celle d'une différentielle priſe en ne feſant varier que y ; les coefficiens $A, B, C \ldots \&c.$ étant conſtants, & le ſecond membre K étant compoſé par voie d'addition ou de ſouſtraction, d'un nombre quelconque de quantités de ces formes $y^m F \cdot x$, $x^m F' \cdot y$ ou plus généralement de ces formes $y^m \varphi (ax-y)$, $x^m \varphi' (ax-y)$. Je vais actuellement intégrer en quantités finies quelques équations de la même forme, en ſuppoſant que les facteurs $A, B, C \ldots \&c.$ ſoient certaines fonctions de x & y, & particulièrement celle-ci

$$x^m \frac{\delta^m \zeta}{dx^m} + mx^{m-1}y\frac{\delta^{m-1} d\zeta}{dx^{m-1}dy} + m\cdot\frac{m-1}{2}x^{m-2}y^2\frac{\delta^{m-2} d\, d\zeta}{dx^{m-2}dy^2} \ldots \&c. = K,$$

K étant compoſé de la ſomme ou de la différence d'un nombre quelconque de quantités telles que

$$y^m \varphi\left(\frac{x}{y}\right),\ x^m \Psi\left(\frac{x}{y}\right).$$

Pour ſuivre un certain ordre, & oppoſer avec plus de clarté le détail des opérations, je vais commencer par des équations moins générales, c'eſt-à-dire où l'expoſant m ſera déterminé.

PROBLÊME I.

Intégrer ou réduire à un ordre moindre d'une unité l'équation

$$x^3\frac{\delta^3 z}{dx^3} + 3x^2y\frac{\delta\delta dz}{dx^2dy} + 3xy^2\frac{\delta d dz}{dx dy^2} + y^3\frac{d^3z}{dy^3} = 0$$

Solution.

Soit fait $x^2\frac{\delta\delta z}{dx^2} + 2xy\frac{\delta dz}{dxdy} + y^2\frac{ddz}{dy^2} = V$, & ſoit différentiée cette équation par rapport à x, & par rapport à y, ce qui donnera

$$x^2\frac{\delta^3 z}{dx^2} = dV - 2xy\frac{\delta\delta dz}{dxdy} - y^2\frac{\delta ddz}{dy^2} - 2x\frac{\delta\delta z}{dx} - 2y\frac{\delta dz}{dy}$$

$$\&\ y^2\frac{d^3z}{dy^2} = dV - x^2\frac{\delta\delta dz}{dx^2} - 2xy\frac{\delta ddz}{dxdy} - 2x\frac{\delta dz}{dx} - 2y\frac{ddz}{dy}$$

on multipliera la première de ces équations par $\frac{x}{dx}$ la ſeconde par $\frac{y}{dy}$ & l'on ſubſtituera à la place de $x^3\frac{\delta^3 z}{dx^3}$ & de $y^3\frac{d^3z}{dy^3}$ leurs valeurs, ce qui donnera

$$\left.\begin{array}{l} x\frac{\delta V}{dx} - 2x^2y\frac{\delta\delta d\zeta}{dx^2dy} - xy^2\frac{\delta d d\zeta}{dxdy^2} - 2x^2\frac{\delta\delta\zeta}{dx^2} - 2xy\frac{\delta d\zeta}{dxdy} \\ \quad +3x^2y\frac{\delta\delta d\zeta}{dx^2dy} + 3xy^2\frac{\delta d d\zeta}{dxdy^2} \\ +y\frac{dV}{dy} - x^2y\frac{\delta\delta d\zeta}{dx^2dy} - 2xy^2\frac{\delta d d\zeta}{dxdy^2} \ldots - 2xy\frac{\delta d\zeta}{dxdy} - 2y^2\frac{dd\zeta}{dy^2} \end{array}\right\} = 0$$

ou bien en réduisant $x\frac{\delta V}{dx} + y\frac{dV}{dy} = 2V$, équation dont l'intégrale donnéra celle de la proposée.

Pour intégrer cette dernière équation, supposons que la quantité V soit telle que l'on ait $dV = p\,dx + q\,dy$: on aura $px + qy = 2V$, & par conséquent

$$dV = p\,dx + \frac{2V\,dy}{y} - \frac{px}{y}\,dy$$

que l'on peut mettre sous cette forme

$$\frac{dV}{V} = \frac{py}{V}\left(\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\right) + \frac{2\,dy}{y}$$

or les deux termes $\frac{dV}{V}$ & $\frac{2\,dy}{y}$ étant des différentielles logarithmiques, & l'autre terme $\frac{py}{V}\left(\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\right)$ étant multiple de $d.\frac{x}{y}$, cette équation ne peût-être intégrable que ce terme ne soit la différentielle logarithmique de quelque fonction de $\frac{x}{y}$; soit représenté cette fonction par $\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$, on aura donc

$$\text{Log. } V = \text{log. } \varphi\left(\frac{x}{y}\right) + 2\,\text{log. } y^2 \text{ ou } V = y^2\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

on néglige ici la constante par ce que le caractère arbitraire φ la comporte.

Donc l'intégrale de la proposée sera

$$x^2 \frac{\delta\delta z}{dx^2} + 2xy \frac{\delta d z}{dx\,dy} + y^2 \frac{d d z}{d y^2} = y^2 \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

C. Q. F. T.

PROBLÊME II

Intégrer, ou réduire à une équation différentielle du premier ordre l'équation

$$x^2 \frac{\delta\delta z}{dx^2} + 2xy \frac{\delta d z}{dx\,dy} + y^2 \frac{dd z}{d y^2} = y^2 \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

Solution

Soit fait $x \frac{\delta z}{dx} + y \frac{d z}{d y} = V$, équation que l'on différentiera par rapport à x, & par rapport à y, pour avoir

$$x \frac{\delta\delta z}{d x} = \delta V - \delta z - y \frac{\delta d z}{d y}$$

$$\& y \frac{dd z}{d y} = d V - x \frac{\delta d z}{d y} - d z$$

on multipliera la première de ces équations par $\frac{x}{dx}$ la seconde par $\frac{y}{dy}$, & l'on ſubſtituera dans la propoſée, à la place de $x^2 \frac{\delta\delta z}{dx^2}$ & de $y^2 \frac{dd z}{dy^2}$ leurs valeurs, ce qui donnera, toute reduction faite, la transformée

$$x \frac{\delta V}{d x} + y \frac{dV}{d y} = V + y^2 \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

Pour intégrer cette équation, ſoit V telle que l'on ait $dV = p\,dx + q\,dy$, on aura $px + qy = V + y^2 \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$

& par conſéquent

$dV = p\,dx + \frac{V\,dy}{y} + y\,dy\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right) - p\,x\,\frac{dy}{y}$, que l'on peût mettre ſous cette forme $dV = p\,y\left(\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\right) + \frac{V\,dy}{y} + y\,d\,y\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$

ou $\frac{y\,dV - V\,dy}{y^2} = p\left(\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\right) + dy\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$.

Soit actuellement φ' le coefficient de la différentielle de φ, de manière que ω étant une variable quelconque, on ait $d\,\varphi\,\omega = \varphi'\,\omega\,d\,\omega$. Cela poſé, on remarquera que le premier membre de la dernière équation eſt la différentielle complête de $\frac{V}{y}$, de plus que le terme $dy\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ eſt $= d\left(y\varphi\left(\frac{x}{y}\right) - y\,\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)d\left(\frac{x}{y}\right)\right.$ ou $= d\left(y\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)\right) - y\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\right)$ d'ou il ſuit que cette équation peût ſe tranſcrire ainſi

$d\,\frac{V}{y} = \left(p - y\,\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\right)\left(\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\right) + d\left(y\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)\right)$

or le ſecond membre de cette équation ne peût-être une différentielle complête, que ſon premier terme ne ſoit la différentielle d'une fonction de $\frac{x}{y}$; donc ſi l'on repréſente cette nouvelle fonction par le caractère Ψ, l'intégrale de la transformée ſera

$\frac{V}{y} = \Psi\left(\frac{x}{y}\right) + y\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ ou $V = y\Psi\left(\frac{x}{y}\right) + y^2\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$

donc on aura pour intégrale de la propoſée

$$x\,\frac{\delta z}{dx} + y\,\frac{dz}{dy} = y\,\Psi\left(\frac{x}{y}\right) + y^2\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right).$$

C. Q. F. T.

PROBLEME III.

Intégrer l'équation $x\frac{\delta z}{dx} + y\frac{dz}{dy} = y\Psi\left(\frac{x}{y}\right) + y^2\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$

Solution.

Soit, comme dans les problêmes précédens $dz = p\,dx + q\,dy$, ce qui donne

$$px + qy = y\Psi\left(\frac{x}{y}\right) + y^2\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

on aura $dz = p\,dx + \Psi\left(\frac{x}{y}\right)dy + y\varphi\left(\frac{x}{y}\right)dy - \frac{px}{y}dy$

ou $dz = py\left\{\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\right\} + \Psi\left(\frac{x}{y}\right)dy + y\varphi\left(\frac{x}{y}\right)dy.$

Mais on a $\Psi\left(\frac{x}{y}\right)dy = d\left(y\,\Psi\left(\frac{x}{x}\right)\right) - y\psi'\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\right)$

& $y\varphi\left(\frac{x}{y}\right)dy = d\left(\frac{y^2}{2}\varphi\left(\frac{x}{y}\right)\right) - \frac{y^2}{2}\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\right)$

Donc en ſubſtituant ces valeurs on aura

$$dz = \left\{py - y\,\psi'\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{1}{2}y^2\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\right\}\left(\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\right)$$
$$+ d\left(y\,\psi\left(\frac{x}{y}\right)\right) + d\left(\frac{1}{2}y^2\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)\right)$$

Or les deux derniers termes de cette équation ſont des différentielles completes, & le premier terme du ſecond membre, étant multiple de $\left(\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\right)$ ne peût être la différentielle que d'une fonction de $\frac{x}{y}$; donc ſi l'on repréſente cette fonction par F, l'intégrale de la propoſée ſera

$$z = F\cdot\left(\frac{x}{y}\right) + y\,\psi\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{2}y^2\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right) \qquad \text{C. Q. F. T.}$$

Corollaire.

Il suit des solutions de ces trois problêmes, que l'intégrale finie de l'équation du troisiéme dégré

$$x^3\frac{\delta^3\zeta}{dx^3}+3x^2y\frac{\delta\,\delta d\zeta}{dx^2\,dy}+3xy^2\frac{\delta\,dd\zeta}{dx\,dy^2}+y^3\frac{d^3\zeta}{dy^3}=0$$

est $\zeta = F\cdot\left(\frac{x}{y}\right)+y\,\psi\left(\frac{x}{y}\right)+y^2\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$

le diviseur 2 de la fonction φ disparoit ici, par ce que cette fonction est arbitraire, au lieu que dans le problême précédent elle étoit déterminée & donnée par l'enoncé de la question.

La méthode que je viens d'employer pour avoir l'intégrale finie de cette équation du troisiéme dégré, s'applique avec le même succès aux équations de même forme, & des dégrés superieurs.

PROBLEME IV.

Intégrer ou réduire à un ordre moindre d'une unité l'équation générale

$$x^m\frac{\delta^m\zeta}{dx^m}+m\cdot x^{m-1}y\frac{\delta^{m-1}d\zeta}{dx^{m-1}dy}+m\cdot\frac{m-1}{2}x^{m-2}y^2\frac{\delta^{m-2}d\,d\zeta}{dx^{m-2}dy^2}\ldots\&c.=0$$

Solution.

Soit fait, comme dans le problême premier.

$$x^{m-1}\frac{\delta^{m-1}\zeta}{dx^{m-1}}+(m-1)x^{m-2}y\frac{\delta^{m-2}d\zeta}{dx^{m-2}dy}+(m-1)\frac{m-2}{2}x^{m-3}y^2\frac{\delta^{m-3}dd\zeta}{dx^{m-3}dy^2}\ldots\&c.=V,$$

Soit différentiée cette équation par rapport à x, & par rapport à y, pour avoir les valeurs suivantes

$$\frac{x^m \delta^m \zeta}{dx^m} = \begin{cases} \frac{x\,\delta V}{dx} - (m-1)\,x^{m-1} y \frac{\delta^{m-1} d\zeta}{dx^{m-1} dy} \\ -(m-1)\left(\frac{m-2}{2}\right) x^{m-2} y^2 \frac{\delta^{m-2} d d\zeta}{dx^{m-2} dy^2} \ldots\ldots \&c. \\ -(m-1) x^{m-1} \frac{\delta^{m-1} \zeta}{dx^{m-1}} - (m-1)(m-2) x^{m-2} y \frac{\delta^{m-2} d\zeta}{dx^{m-2} dy} \\ \vdots \\ -(m-1)\left(\frac{m-2}{2}\right)\left(\frac{m-3}{3}\right) x^{m-3} y^2 \frac{\delta^{m-3} d d\zeta}{dx^{m-3} dy^2} \quad \ldots\ldots \end{cases}$$

$$y^m \frac{d^m \zeta}{dy^m} = \begin{cases} \& \\ y \frac{dV}{dy} - x^{m-1} y \frac{\delta^{m-1} d\zeta}{dx^{m-1} dy} - (m-1) x^{m-2} y^2 \frac{\delta^{m-2} d d\zeta}{dx^{m-2} dy^2} \ldots \&c. \\ -(m-1) x^{m-2} y \frac{\delta^{m-2} d\zeta}{dx^{m-2} dy} - 2(m-1)\left(\frac{m-2}{2}\right) x^{m-3} y^2 \frac{\delta^{m-3} dd\zeta}{dx^{m-3} dy^2} \ldots \&c. \end{cases}$$

On ſubſtituera ces deux valeurs dans la propoſée, ou ce qui revient au même, on ajoutera enſemble les ſeconds membres de ces deux égalités, & on ajoutera à leur ſomme les autres termes de la propoſée, qui ſont

$$m \cdot x^{m-1} y \frac{\delta^{m-1} d\zeta}{dx^{m-1} dy} + m\left(\frac{m-1}{2}\right) x^{m-2} y^2 \frac{\delta^{m-2} d d\zeta}{dx^{m-2} dy^2} \ldots\ldots \&c.$$

Cela fait, on remarquera dans cette ſomme deux eſpeces de ſuites, les unes contiennent des différentielles de ζ du dégré m, & les autres des différentielles de ζ du dégré $m-1$. Or la ſomme de toutes les premières ſe reduit à zéro; en effet la ſomme des coefficiens du terme

$$x^{m-1} y \frac{\delta^{m-1} dz}{dx^{m-1} dy} \text{ eſt} = m - (m-1) - 1 = 0$$

celle de $x^{m-2} y^2 \frac{\delta^{m-2} d d\zeta}{dx^{m-2} dy^2}$ eſt $= m\left(\frac{m-1}{2}\right) - (m-1)\left(\frac{m-2}{2}\right) - (m-1) = 0$

& ainſi de ſuite pour les autres termes du même ordre, quant aux autres ſuites, il eſt facile de les reduire, en remarquant 1° que tous les termes ſont multipliés par

$(m-1)$

$(m-1)$ 2° qu'en les diviſant par $(m-1)$, le coëfficient du terme $x^{m-1}\frac{\delta^{m-1}\zeta}{dx^{m-1}}$ eſt $= -1$

celui du terme $x^{m-2}y\frac{\delta^{m-2}dz}{dx^{m-2}dy}$ eſt $= -(m-2)-1 = -(m-1)$

celui du terme $x^{m-3}y^2\frac{\delta^{m-3}ddz}{dx^{m-3}dy^2}$ eſt

$= -\left(\frac{m-2}{2}\right)(m-3) - 2\left(\frac{m-2}{2}\right) = -(m-1)\left(\frac{m-2}{2}\right)$

& en continuant ainſi de ſuite, on trouvera que tous les coëfficiens ſont les mêmes, que ceux des termes correſpondans de la valeur de V, multipliés par $-(m-1)$, d'où il ſuit que la transformée ſera

$$x\frac{\delta V}{dx} + y\frac{dV}{dy} - (m-1)V = 0$$

Or en intégrant cette équation comme celle du problême premier, on trouve $V = y^{m-1}\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$, donc l'intégrale première de la propoſée ſera $x^{m-1}\frac{\delta^{m-1}\zeta}{dx^{m-1}} + (m-1)x^{m-2}y\frac{\delta^{m-2}d\zeta}{dx^{m-2}dy}$ $+ (m-1)\left(\frac{m-2}{2}\right)x^{m-3}y^2\frac{\delta^{m-3}dd\zeta}{dx^{m-3}dy^2}\ldots$ &c. $= y^{m-1}\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ équation qui eſt de la même forme que la propoſée, excepté que le ſecond membre au lieu d'être $= 0$ eſt $= y^{m-1}\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$

C. Q. F. T.

PROBLÊME V.

Intégrer ou reduire à un ordre moindre d'une unité l'équation

$$x^n\frac{\delta^n\zeta}{dx^n}+n\,x^{n-1}\,y\,\frac{\delta^{n-1}d\zeta}{dx^{n-1}dy}+n\left(\frac{n-1}{2}\right)x^{n-2}y^2\,\frac{\delta^{n-2}dd\zeta}{dx^{n-2}dy^2}\ldots\ldots\ \&c.$$
$$=y^n\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

Solution.

On fera, comme dans le problême précédent.

$$x^{n-1}\frac{\delta^{n-1}z}{dx^{n-1}}+(n-1)x^{n-2}y\frac{\delta^{n-2}az}{dx^{n-2}dy}+(n-1)\left(\frac{n-2}{2}\right)x^{n-3}y^2\frac{\delta^{n-3}ddz}{dx^{n-3}dy^2}\ldots\ \&c.$$
$$=V'$$

& en opérant de la même manière on transformera la proposée en celle ci

$$x\frac{\delta V'}{dx}+y\frac{dV'}{dy}=(n-1)\,V'+y^n\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

Soit actuellement V' telle que l'on ait $dV'=p\,dx+q\,dy$, on aura $p\,x+q\,y=V'\,(n-1)+y^n\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ & par conséquent

$$dV'=p\,dx+(n-1)\,V'\frac{dy}{y}+y^{n-1}\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)dy-\frac{p\,x}{y}\,dy \text{ ou}$$

bien $y\,dV'-(n-1)\,V'\,dy=py^2\left(\frac{y\,dx-x\,dy}{y^2}\right)+y^n\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)dy$

cela posé, on rendra le premier membre différentielle complete en le multipliant par $\frac{1}{y^n}$ ou, ce qui est la même chose, par $\frac{y^{n-2}}{y^{2(n-1)}}$, car alors il deviendra $\frac{y^{n-1}\,dV'-(n-1)V'\,y^{n-2}\,dy}{y^{2(n-1)}}$ ou $d\left(\frac{V'}{y^{n-1}}\right)$; ainsi en divisant aussi le second membre par y^n, on aura $d\left(\frac{V'}{y^{n-1}}\right)=py^{2-n}\left(\frac{y\,dx-x\,dy}{y^2}\right)+\varphi\left(\frac{x}{y}\right)dy$; ou par

ce que l'on a $\varphi\left(\frac{x}{y}\right) dy = d\left) y\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right) - y\,\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\right)$, la transformée deviendra $d\left(\frac{V'}{y^{n-1}}\right) = \left(p\,y^{2-n} - y\,\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\right)\left(\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\right) + d\left(y\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)\right)$, équation dont l'intégrale est $\frac{V'}{y^{n-1}} = \Psi\left(\frac{x}{y}\right) + y\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$, en multipliant par y^{n-1}, $V' = y^{n-1}\,\Psi\left(\frac{x}{y}\right) + y^n\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$. Donc l'intégrale de la proposée sera

$$x^{n-1}\frac{\delta^{n-1}\zeta}{dx^{n-1}} + (n-1)x^{n-2}y\frac{\delta^{n-2}}{dx^{n-2}}\frac{d\zeta}{dy} + (n-1)\left(\tfrac{n-2}{2}\right)x^{n-3}y^2\frac{\delta^{n-3}}{dx^{n-3}}\frac{d}{dy^2}\frac{d\zeta}{dy^2}\ldots\&c.$$
$$= y^{n-1}\,\Psi\left(\frac{x}{y}\right) + y^n\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right).$$

C. Q. F. T.

Corollaire I.

Si le second membre de la proposée, au lieu d'être $y^n\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ étoit $x^n\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ l'intégrale se trouveroit de la même manière, car on a $x^n\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right) = y^n \cdot \frac{x^n}{y^n}\varphi\left(\frac{x}{y}\right) = y^n f\cdot\left(\frac{x}{y}\right)$ donc il suffiroit de changer dans l'intégrale précédente la fonction donnée φ en une autre qui seroit son produit par $\frac{x^n}{y^n}$.

Corollaire II.

Si dans la proposée du problême précédent on fait $n = m - 1$, on aura l'intégrale du problême IV, donc l'équation

$$x^{m-2}\frac{\delta^{m-2}\zeta}{dx^{m-2}} + (m-2)\,x^{m-3}\,y\frac{\delta^{m-3}\,d\,\zeta}{dx^{m-3}dy} \cdots \&c. = y^{m-2}\,\Psi\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$+ y^{m-1}\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

eſt l'intégrale ſeconde de l'équation du problême IV.

PROBLÊME VI.

Intégrer ou reduire à un ordre moindre d'une unité l'équation

$$x^k\frac{\delta^k\zeta}{dx^k} + kx^{k-1}y\frac{\delta^{k-1}\,d\,\zeta}{dx^{k-1}dy} + k\left(\frac{k-1}{2}\right)x^{k-2}y^2\frac{\delta^{k-2}d\,d\,\zeta}{dx^{k-2}dy^2} \cdots \&c.$$

$$= y^k\,\Psi\left(\frac{x}{y}\right) + y^{k+1}\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

Solution.

Soit fait $x^{k-1}\frac{\delta^{k-1}\zeta}{dx^{k-1}} + (k-1)\,x^{k-2}\,y\frac{\delta^{k-2}\,d\zeta}{dx^{k-2}dy} \cdots \&c. = V''$ & l'on aura la transformée

$$x\frac{\delta V''}{dx} + y\frac{dV''}{dy} = (k-1)V'' + y^k\,\Psi\left(\frac{x}{y}\right) + y^{k+1}\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right),$$

donc l'intégrale, par la méthode du problême précédent, ſe trouve

$$V'' = y^{k-1}\,F\left(\frac{x}{y}\right) + y^k\,\Psi\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{2}\,y^{k+1}\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

donc l'intégrale de la propoſée ſera

$$x^{k-1}\frac{\delta^{k-1}z}{dx^{k-1}} + (k-1)\,x^{k-2}\,y\,\frac{\delta^{k-2}dz}{dx^{k-2}dy} \cdots \&c. = y^{k-1}\,F\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$+ y^k\,\Psi\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{2}\,y^{k+1}\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

C. Q. F. T.

Corollaire.

La proposée étant l'intégrale seconde de l'équation générale du problême IV dans laquelle on a fait $k=m-2$, il suit que l'intégrale troisième de cette équation sera

$$x^{m-3}\frac{\delta^{m-3}z}{dx^{m-3}}+(m-3)x^{m-4}y\frac{\delta^{m-4}dz}{dx^{m-4}dy}\cdots\cdots \&c. = y^{m-3}F\left(\frac{x}{y}\right)$$
$$+y^{m-2}\Psi\left(\frac{x}{y}\right)+y^{m-1}\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

Le diviseur 2 de la fonction φ est compris dans cette fonction qui est ici arbitraire, au lieu que dans le problême précédent elle est déterminée & donnée dans l'énoncé.

Conclusion

En continuant ces opérations, il est facile de reconnoitre que l'équation générale

$$x^m\frac{\delta^m z}{dx^m}+m\,x^{m-1}\,\frac{\delta^{m-1}dz}{dx^{m-1}dy}\cdots \&c = 0$$ a pour intégrale finie

$$z=f\cdot\left(\frac{x}{y}\right)+yf'\left(\frac{x}{y}\right)+y^2f''\left(\frac{x}{y}\right)\cdots\cdots+y^{m-3}F\left(\frac{x}{y}\right)$$
$$+y^{m-2}\Psi\left(\frac{x}{y}\right)+y^{m-1}\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

les fonctions f, f', $f''\cdots F$, Ψ & φ étant arbitraires & indépendantes les unes des autres & leur nombre étant $=m$.

Jusque ici j'ai supposé que le second membre de la proposée générale fût $=0$, mais on peut encore l'intégrer même en quantités finies, lorsqu'il est composée d'une certaine manière de x & de y comme on va le voir dans les problêmes suivans.

PROBLÊME VII.

Intégrer en quantités finies l'équation générale

$$x^m \frac{\delta^m z}{dx^m} + m x^{m-1} y \frac{\delta^{m-1} dz}{dx^{m-1} dy} \cdots \&c. = Y \varphi\left(\frac{x}{y}\right) + Y' \Psi\left(\frac{x}{y}\right)$$

les quantités Y & Y' étant des fonctions quelconques & données de y, & les fonctions φ & Ψ étant auſſi données.

Solution

I

On intégrera d'abord une fois cette équation, comme celles des problêmes précédens; pour cela on fera

$$x^{m-1} \frac{\delta^{m-1} z}{dx^{m-1}} + (m-1)\, x^{m-2} y \frac{\delta^{m-2} dz}{dx^{m-2} dy} \cdots \&c. = V$$

ce qui donnera pour transformée

$$x \frac{\delta V}{dx} + y \frac{dV}{dy} = (m-1) V + Y \varphi\left(\frac{x}{y}\right) + Y' \Psi\left(\frac{x}{y}\right)$$

& par conſéquent, en feſant $dV = p\, dx + q\, dy$

$$p x + q y = (m-1) V + Y \varphi\left(\frac{x}{y}\right) + Y' \Psi\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\text{ou } y\, dV - (m-1) V\, dy = p y^2 \left(\frac{y dx - x dy}{y^2}\right) + Y\, dy\, \varphi\left(\frac{x}{y}\right) + Y'\, dy\, \Psi\left(\frac{x}{y}\right)$$

on diviſera tout par y^m, pour rendre le premier membre différentielle complete, ce qui donnera

$$\frac{y^{m-1} dV - (m-1) V y^{m-2} dy}{y^{2(m-1)}} = p y^{2-m} \left(\frac{y\, dx - x\, dy}{y^2}\right) + \frac{Y dy}{y^m} \varphi\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{Y' dy}{y^m} \Psi\left(\frac{x}{y}\right)$$

cela fait, on remarquera que l'on a

$$\frac{dy}{y^m} \varphi\left(\frac{x}{y}\right) = d\left(\varphi\left(\frac{x}{y}\right) \int \frac{Y}{y^m} dy\right) - \int \frac{Y dy}{y^m} \cdot \varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{y dx - x dy}{y^2}\right)$$

φ' étant la coefficient de la différentielle de φ. on a de même

$\frac{Y'dy}{y^m}\Psi\left(\frac{x}{y}\right)=d\left(\Psi\left(\frac{x}{y}\right)\int\frac{Y'dy}{y^m}\right)-\Psi'\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{y\,dx-x\,dy}{y^2}\right)\int\frac{Y'dy}{y^m}$; d'où il suit qu'en fesant pour abréger

$py^{2-m}-\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\int\frac{Ydy}{y^m}-\Psi'\left(\frac{x}{y}\right)\int\frac{Y'dy}{y^m}=K$, l'équation précédente se peût-mettre sous cette forme

$d\left(\frac{V}{y^{m-1}}\right)=K\left(\frac{y\,dx-x\,dy}{y^2}\right)+d\left(\varphi\left(\frac{x}{y}\right)\int\frac{Ydy}{y^m}\right)+d\left(\Psi\left(\frac{x}{y}\right)\int\frac{Y'dy}{y^m}\right)$ dont l'intégrale ne peut-être que

$\frac{V}{y^{m-1}}=F\left(\frac{x}{y}\right)+\varphi\left(\frac{x}{y}\right)\int\frac{Ydy}{y^m}+\Psi\left(\frac{x}{y}\right)\int\frac{Y'dy}{y^m}$.

Donc l'intégrale première de la propoſée ſera

$x^{m-1}\,\frac{\delta^{m-1}z}{dx^{m-1}}+(m-1)\,x^{m-2}y\,\frac{\delta^{m-2}dz}{dx^{m-1}dy}\cdots\&c.=y^{m-1}F\left(\frac{x}{y}\right)+y^{m-1}\varphi\left(\frac{x}{y}\right)\int\frac{Ydy}{y^m}+y^{m-1}\Psi\left(\frac{x}{y}\right)\int\frac{Y'dy}{y^m}$ dans laquelle la fonction F eſt arbitraire, les autres fonctions φ & Ψ étant données dans l'énoncé.

II

Cette intégrale eſt preciſement de la même forme que la propoſée, d'où il ſuit qu'on l'intégrera de la même manière, & l'on aura pour intégrale ſeconde

$x^{m-2}\,\frac{\delta^{m-2}z}{dx^{m-2}}+(m-2)\,x^{m-3}y\,\frac{\delta^{m-3}dz}{dx^{m-3}dy}\cdots\&c.=y^{m-2}F'\left(\frac{x}{y}\right)+y^{m-1}I\left(\frac{x}{y}\right)+y^{m-2}\varphi\left(\frac{x}{y}\right)\int dy\int\frac{Ydy}{y^m}+y^{m-2}\Psi\left(\frac{x}{y}\right)\int dy\int\frac{Y'dy}{y^m}$

III

On intégrera encore cette équation de la même manière, & l'on trouvera pour intégrale troisième

$$x^{m-3}\frac{\delta^{m-3}z}{dx^{m-3}}\cdots \&c. = y^{m-3}F''\left(\frac{x}{y}\right)+y^{m-2}F'\left(\frac{x}{y}\right)+y^{m-1}F\left(\frac{x}{y}\right)$$
$$+y^{m-3}\varphi\left(\frac{x}{y}\right)\int dy\int dy\int\frac{\Upsilon dy}{y^m}+y^{m-3}\Psi\left(\frac{x}{y}\right)\int dy\int dy\int\frac{Y'dy}{y^m}$$

où l'on remarquera que la fonction F devroit être divisée par 2, mais comme cette fonction est arbitraire, de même que F' & F'', elle comporte toute sorte de coëfficiens constans.

IV

Il est facile actuellement de conclure par analogie que l'intégrale finie de la proposée est

$$z = f\left(\frac{x}{y}\right)+yf'\left(\frac{x}{y}\right)+y^2f''\left(\frac{x}{y}\right)\cdots+y^{m-3}F''\left(\frac{x}{y}\right)$$
$$+y^{m-2}F'\left(\frac{x}{y}\right)+y^{m-1}F\left(\frac{x}{y}\right)+\varphi\left(\frac{x}{y}\right)\int^m\frac{\Upsilon dy_m}{y^m}$$
$$+\Psi\left(\frac{x}{y}\right)\int^m\frac{\Upsilon' dy^m}{y^m}.$$

C. Q. F. T.

PROBLÈME VIII.

Intégrer en quantités finies l'équation générale

$$x^m\frac{\delta^m z}{dx^m}+m\,x^{m-1}\,y\,\frac{\delta^{m-1}dz}{dx^{m-1}dy}\cdots \&c. = X\varphi\left(\frac{x}{y}\right)+X'\Psi\left(\frac{x}{y}\right)$$

les quantités X & X' étant des fonctions données de x.

Solution.

On fera la même transformation que dans le problême précédent, & l'on aura

px

$$p\,x + q\,y = (m-1)\,V + X\varphi\left(\frac{x}{y}\right) + X'\,\Psi\left(\frac{x}{y}\right)$$

cela fait au lieu d'éliminer q, on éliminera p, ce qui donnera, (en mettant ſa valeur dans $dV = p\,dx + q\,dy$)

$$x\,dV - (m-1)\,V\,dx = -q\,y^2\left(\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\right) + X\,dx\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

$+ X'\,dx\,\Psi\left(\frac{x}{y}\right)$ on diviſera tout par x^m pour rendre le premier membre, différentielle compléte, & l'on aura

$$\frac{x^{(m-1)}\,dV - (m-1)\,V x^{m-2}\,dx}{x^{2(m-1)}} = \frac{-qy^2}{x^m}\left(\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\right) + \frac{X\,dx}{x^m}\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

$+ \frac{X'\,dx}{x^m}\Psi\left(\frac{x}{y}\right)$ or on a $\frac{X\,dx}{x^m}\varphi\left(\frac{x}{y}\right) = d\left(\varphi\left(\frac{x}{y}\right)\int\frac{X\,dx}{x^m}\right)$

$- \varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\right)\int\frac{X'\,dx}{x^m}$ de même $\frac{X'\,dx}{x^m}\Psi\left(\frac{x}{y}\right)$

$= d\left(\Psi\left(\frac{x}{y}\right)\int\frac{X'\,dx}{x^m}\right) - \Psi'\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\right)\int\frac{X'\,dx}{x^m}$, par conſéquent, en repréſentant par K la quantité

$$-\frac{q\,y^2}{x^m} - \varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\int\frac{X\,dx}{x^m} - \Psi\left(\frac{x}{y}\right)\int\frac{X'\,dx}{x^m}$$ l'équation précédente deviendra $d\left(\frac{V}{x^{m-1}}\right) = K\left(\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\right)$

$+ d\left(\varphi\left(\frac{x}{y}\right)\int\frac{X\,dx}{x^m}\right) + d\left(\Psi\left(\frac{x}{y}\right)\int\frac{X'\,dx}{x^m}\right)$ dont l'intégrale ne peut-être que $\frac{V}{y^{m-1}} = F\left(\frac{x}{y}\right) + \varphi\left(\frac{x}{y}\right)\int\frac{X\,dx}{x^m}$

$+ \Psi\left(\frac{x}{y}\right)\int\frac{X'\,dx}{x^m}$, donc l'intégrale première de la propoſée ſera $x^{m-1}\frac{\delta^{m-1}z}{dx^{m-1}} + (m-1)\,x^{m-2}\,y\frac{\delta^{m-2}dz}{dx^{m-2}dy}\cdots$ &c. $= x^{m-1}F\left(\frac{x}{y}\right)$

$+ x^{m-1}\varphi\left(\frac{x}{y}\right)\int\frac{X\,dx}{x^m} + x^{m-1}\Psi\left(\frac{x}{y}\right)\int\frac{X'\,dx}{x^m}$. Mais cette intégrale eſt de la même forme que la propoſée, on l'intégrera par conſéquent de la même manière, & en con-

tinuant ainſi de ſuite, on parviendra à l'intégrale finie qui eſt

$$\zeta = f\left(\frac{x}{y}\right) + x f'\left(\frac{x}{y}\right) + x^2 f''\left(\frac{x}{y}\right) \cdots x^{m-3} F''\left(\frac{x}{y}\right)$$
$$+ x^{m-2} F'\left(\frac{x}{y}\right) + x^{m-1} F\left(\frac{x}{y}\right) + \varphi\left(\frac{x}{y}\right) \int^m \frac{X dx^m}{x^m}$$
$$+ \Psi\left(\frac{x}{y}\right) \int^m \frac{X' dx^m}{x^m}$$

C. Q. F. T.

Théoréme

Le caractère W repréſentant une formule en différentielles partielles, ſi l'équation $W = G$ a pour intégrale finie & complete $\zeta = g$, & que l'équation $W = K$ ait pour intégrale finie & complete $\zeta = k$, je dis que l'équation $W = G + K$ aura pour intégrale finie & complete. $\zeta = g + k$.

Démonſtration

Soit Δ le ſymbole des opérations qu'il faut faire ſur ζ pour avoir W, de manière que l'on ait $\Delta \cdot \zeta = W$, on aura auſſi $\Delta \cdot k = K$, & $\Delta \cdot g = G$. ſoit $\zeta = \omega$ l'intégrale de l'équation $W = G + K$, on aura de même $\Delta \cdot \omega = G + K$ & par conſéquent $\Delta \cdot \omega = \Delta \cdot g + \Delta k$, ou, ce qui revient au même $\omega = g + k$. Donc généralement parlant de ce que l'on a $\Delta \omega = \Delta (g + k)$ on ne peut pas en conclure que l'on ait $\omega = g + k$, mais ſeulement $\omega = g + k$ plus une arbitraire, mais comme on ſuppoſe completes les intégrales $\zeta = g$ & $\zeta = k$ les quantités g & k contiennent déjà les arbitraires, d'où il ſuit que le théorême eſt venu à la rigueur.

PROBLÊME IX.

Intégrer en quantités finies l'équation générale

$$x^m \frac{\delta^m z}{dx^m} + m \cdot x^{m-1} y \frac{\delta^{m-1} dz}{dx^{m-1} dy} \cdots \&c. = \begin{cases} Y\varphi\left(\frac{x}{y}\right) + Y'\varphi'\left(\frac{x}{y}\right) \\ + Y''\varphi''\left(\frac{x}{y}\right) \ldots \&c. \\ + X\Psi\left(\frac{x}{y}\right) + X'\Psi'\left(\frac{x}{y}\right) \\ + X''\Psi''\left(\frac{x}{y}\right) \ldots \&c. \end{cases}$$

Les quantités Y, Y', Y'' étant des fonctions quelconques de y; X, X', X'' des fonctions quelconques de x, le nombre des termes du second membre étant quelconque, & les fonctions données φ, φ', φ'' .... Ψ, Ψ', Ψ''... étant indépendantes.

Solution

On pourroit resoudre ce problême particuliérement comme les précédents, mais il est plus simple d'employer le principe démontré dans le théorême. Ainsi l'intégrale demandée doit être

$$\mathfrak{I} = \begin{cases} f\left(\frac{x}{y}\right) + y f'\left(\frac{x}{y}\right) + y^2 f''\left(\frac{x}{y}\right) \ldots + y^{m-3} F''\left(\frac{x}{y}\right) \\ + y^{m-2} F'\left(\frac{x}{y}\right) + y^{m-1} F\left(\frac{x}{y}\right) + \varphi\left(\frac{x}{y}\right) \int^m \frac{Y dy^m}{y^m} \\ + \varphi'\left(\frac{x}{y}\right) \int^m \frac{Y dy^m}{y^m} + \varphi''\left(\frac{x}{y}\right) \int^m \frac{Y'' a y^m}{y^m} \ldots \&c. \\ + f\left(\frac{x}{y}\right) + x f'\left(\frac{x}{y}\right) + x^2 f''\left(\frac{x}{y}\right) \ldots + x^{m-3} F''\left(\frac{x}{y}\right) \\ + x^{m-2} F'\left(\frac{x}{y}\right) + x^{m-1} F\left(\frac{x}{y}\right) + \Psi\left(\frac{x}{y}\right) \int^m \frac{X dx^m}{x^m} \\ + \Psi'\left(\frac{x}{y}\right) \int^m \frac{X dx^m}{x^m} + \Psi''\left(\frac{x}{y}\right) \int^m \frac{X'' dx^m}{x^m} \ldots \&c. \end{cases}$$

Mais l'on a $x^m f\left(\frac{x}{y}\right) = y^m f\left(\frac{x}{y}\right)$ lors que la fonction f eſt arbitraire, donc l'intégrale ſera

$$\zeta = \begin{cases} f\left(\frac{x}{y}\right) + y f'\left(\frac{x}{y}\right) + y^2 f''\left(\frac{x}{y}\right) \ldots + y^{m-3} F''\left(\frac{x}{y}\right) \\ + y^{m-2} F'\left(\frac{x}{y}\right) + y^{m-1} F\left(\frac{x}{y}\right) + \varphi\left(\frac{x}{y}\right) \int^m \frac{Y dy^m}{y^m} \\ + \varphi'\left(\frac{x}{y}\right) \int^m \frac{Y' dy^m}{y^m} + \varphi''\left(\frac{x}{y}\right) \int^m \frac{Y'' dy^m}{y^m} \ldots \&c. \\ + \Psi\left(\frac{x}{y}\right) \int^m \frac{X dx_m}{x^m} + \Psi'\left(\frac{x}{y}\right) \int^m \frac{X' dx^m}{x^m} \\ + \Psi''\left(\frac{x}{y}\right) \int^m \frac{X'' dx^m}{x^m} \ldots \&c. \end{cases}$$

Remarque.

J'ai fait voir dans le mémoire qui a pour objet la détermination des fonctions arbitraires dans les intégrales des équations aux différentielles partielles qu'il eſt toujours poſſible de déterminer les fonctions dans une équation de cette forme $\zeta = K + L\varphi V + M\varphi' V + N\varphi'' V \ldots \&c.$ pour que cette équation ſatisfaſſe à autant des conditions particulières qu'elle renferme de fonctions, lors que ces conditions ſont de nature a être exprimées par une équation; ou de conſtruire la valeur de ζ, lorſque ces conditions ne ſont pas ſoumiſes à la loi de continuité; donc il ſera toujours poſſible de conſtruire l'équation différentielle du dernier problême, ou ſon intégrale, quand même la ſurface courbe à laquelle elle appartient, ſeroit d'ailleurs obligée de paſſer par un nombre m de courbes à double courbure, diſcontinuës, ou tracées au hazard dans l'eſpace, mais données.

Pour abréger, je ſuppoſerai toujours dans la ſuite que l'on ait

$$W = x^m \frac{\delta^m z}{dx^m} + m \cdot x^{m-1} y \frac{\delta^{m-1} dz}{dx^{m-1} dy} + m \cdot \left(\frac{m-1}{2}\right) x^{m-2} y^2 \frac{\delta^{m-2} ddz}{dx^{m-2} dy^2} \ldots \&c.$$

$$V = x^{m-1} \frac{\delta^{m-1} z}{dx^{m-1}} + (m-1) x^{m-2} y \frac{\delta^{m-2} dz}{dx^{m-2} dy} + (m-1)\left(\frac{m-2}{2}\right) x^{m-3} y^2 \frac{\delta^{m-3} ddz}{dx^{m-3} dy^2} \ldots \&c.$$

$$V' = x^{m-2} \frac{\delta^{m-2} z}{dx^{m-2}} + (m-2) x^{m-3} y \frac{\delta^{m-3} dz}{dx^{m-3} dy} + (m-2)\left(\frac{m-3}{2}\right) x^{m-4} y^2 \frac{\delta^{m-4} ddz}{dx^{m-4} dy^2} \ldots \&c.$$

$$V'' = x^{m-3} \frac{\delta^{m-3} z}{dx^{m-3}} \ldots \&c.$$ & ainſi de ſuite;

D'où il ſuit, comme on l'a vû dans le problême IV, que l'on aura

$$W = x \frac{\delta V}{dx} + y \frac{dV}{dy} - (m-1) V$$

$$V = x \frac{\delta V'}{dx} + y \frac{dV'}{dy} - (m-2) V'$$

$$V' = x \frac{\delta V''}{dx} + y \frac{dV''}{dy} - (m-3) V''$$

$\&c. \ldots\ldots\ldots\ldots \&c.$

PROBLÊME X.

Intégrer, ou réduire à un ordre moindre d'une unité l'équation

$W + AV + BV' + CV'' + DV''' \ldots\ldots \&c. = K.$

Les coëfficiens $A, B, C, D \ldots \&c.$ étant conſtans, & le ſecond membre K étant de même forme que celui de l'équation du problême précédent.

Solution.

Soit mise à la place de W sa valeur donnée ci-dessus, & la proposée deviendra

$$x\frac{\delta V}{dx} + y\frac{dV}{dy} + (A-(m-1))V + BV' + CV'' + DV''' \ldots \&c. = K.$$

Cela posé, quoique le nombre des coëfficiens A, B, C, D . . . &c. puisse être $= m$, & que la quantité z puisse se trouver sans différentielles dans la proposée, néant-moins je supposerai que le nombre de ces coëfficiens soit quelconque & représenté par n. & l'on transformera la proposée en faisant

$$V + aV' + bV'' + cV''' \ldots \&c. = \omega$$

Le nombre des coëfficiens constans & indéterminés $a, b, c \ldots$ &c. étant $= n - 1$ c'est à-dire les plus hautes différentielles de z qui se trouvent dans les valeurs de K & de ω étant le même ordre la dernière équation donne

$$V = \omega - aV' - bV'' - cV''' \ldots \&c.$$

$$x\frac{\delta V}{dx} = x\frac{\delta \omega}{dx} - ax\frac{\delta V'}{dx} - bx\frac{\delta V''}{dx} - cx\frac{\delta V'''}{dx} \ldots \&c.$$

$$\& y\frac{dV}{dy} = y\frac{d\omega}{dy} - ay\frac{dV'}{dy} - by\frac{dV''}{dy} - cy\frac{dV'''}{dy} \ldots \&c.$$

substituant ces valeurs dans la proposée elle deviendra

$$\left.\begin{array}{l} x\frac{\delta\omega}{dx} + y\frac{d\omega}{dy} + \omega(A-(m-1)) \\ -a\left\{x\frac{\delta V'}{dx} + y\frac{dV'}{dy} + \left(A-(m-1)-\frac{B}{a}\right)V'\right\} \\ -b\left\{x\frac{\delta V''}{dx} + y\frac{dV''}{dy} + \left(A-(m-1)-\frac{C}{b}\right)V''\right\} \\ -c\left\{x\frac{\delta V'''}{dx} + y\frac{dV'''}{dy} + \left(A-(m-1)-\frac{D}{c}\right)V'''\right\} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \&c. \end{array}\right\} = K$$

ou, ce qui revient au même

$$\left.\begin{array}{l} x\frac{\delta\omega}{dx}+y\frac{d\omega}{dy}+\omega\left(A-(m-1)\right) \\ -a\left\{x\frac{\delta V'}{dx}+y\frac{dV'}{dy}-(m-2)V'+\left(A-1-\frac{B}{a}\right)V'\right\} \\ -b\left\{x\frac{\delta V''}{dx}+y\frac{dV''}{dy}-(m-3)V''+\left(A-2-\frac{C}{c}\right)V'''\right\} \\ -c\left\{x\frac{\delta V'''}{dx}+y\frac{dV'''}{dy}-(m-4)V'''+\left(A-3-\frac{D}{c}\right)V''''\right\} \\ \quad\ldots\ldots\ldots

de plus on peut donner aux indéterminées a, b, c ... &c. des valeurs telles que ces coëfficiens soient égaux, c'est-à-dire que l'on ait

$$A - 1 + \frac{b-B}{a} = a$$

$$\frac{b}{a}\left(A-2+\frac{c-C}{b}\right) = b \text{ ou } A-2+\frac{c-C}{b} = a$$

$$\frac{c}{a}\left(A-3+\frac{*-D}{c} = c \text{ ou } A-3+\frac{*-D}{c} = a\right.$$

. . . . . &c. . . . . &c.

Car le nombre des indéterminées est le même que celui des coëfficiens, donc la transformée peut se reduire à

$$x\frac{\delta\omega}{dx} + y\frac{d\omega}{dy} + \left(A-(m-1)-a\right)\omega = K$$

Mais, par ce qui précéde, l'intégrale de cette équation est

$$\omega = y^{a+m-1-A}\, F\left(\frac{x}{y}\right) + y^{a+m-1-A}\, K'$$

La quantité K' se trouvant comme dans le problême précédent, donc l'intégrale de la proposée est

$$V + aV' + bV'' + cV''' \ldots = y^{a+m-1-A} F\left(\frac{x}{y}\right) + y^{a+m-1-A} K'$$

où les coëfficiens a, b, c ... &c. ne dépendent que de la solution d'une équation algébrique du dégré m.

C. Q. F. T.

Exemple

Soit $m = 2$, de manière que la proposée se reduise à

$$\left.\begin{array}{l} x^2\frac{\delta\delta\zeta}{dx^2} + 2xy\frac{\delta d\zeta}{dxdy} + y^2\frac{dd\zeta}{dy^2} \\ + A\left\{\frac{x\delta\zeta}{dx} + y\frac{d\zeta}{dy}\right\} \\ + B\zeta \end{array}\right\} = K$$

on

on aura $\omega = x\frac{\delta z}{dx} + y\frac{dz}{dy} + a\zeta$, & ſi l'on fait encore, pour ſimplifier $K = 0$, on aura pour intégrale $x\frac{\delta z}{dx} + y\frac{dz}{dy} + a\zeta = y^{a-A+1} F\left(\frac{x}{y}\right)$. actuellement pour déterminer la conſtante a qui ſe trouve ſeule dans ce cas là, on ſe ſervira de la première équation entre les indéterminées, qui parceque l'on a $b = 0$ devient

$$A - 1 - \frac{B}{a} = a, \text{ d'ou l'on tire}$$

$$a = \frac{A-1 \pm \sqrt{(A-1)^2 - 4B}}{2};$$

d'où il ſuit que l'intégrale demandée eſt

$$x\frac{\delta\zeta}{dx}y + \frac{dz}{dy} + \zeta \cdot \frac{A-1 \pm \sqrt{(A-1)^2-4B}}{2} = y^{\frac{-A+1 \pm \sqrt{(A-1)^2-4B}}{2}} F\left(\frac{x}{y}\right)$$

Remarque I.

Peut-être ſe trouverat on embaraſſé par l'ambiguité des ſignes, & demanderat on ſi l'équation différentielle de cet exemple a deux intégrales premières; mais il faut obſerver que ces deux intégrales ſont identiques. On s'en convaincra facilement en les intégrant ou toutes deux ſeparèment, ou conjointement, en conſervant le double ſigne car alors on remarquera que l'intégrale en quantités finies eſt unique. En effet on ſait que l'intégrale de l'équation générale $x\frac{\delta z}{dx} + y\frac{dz}{dy} + m\zeta = y^n F\left(\frac{x}{y}\right)$ eſt $\zeta = y^{-m} f\cdot\left(\frac{x}{y}\right) + y^n \frac{}{m+n} F\left(\frac{x}{y}\right)$ ou, (lorſque la fonction F eſt arbitraire, comme dans ce cas ci) $\zeta = y^{-m} f\left(\frac{x}{y}\right) + y^n F\left(\frac{x}{y}\right)$; donc

l'intégrale finie de l'équation que j'ai prise pour exemple sera

$$z = y^{\frac{-A+1\mp\sqrt{(A-1)^2-4B}}{2}} f\left(\frac{x}{y}\right) + y^{\frac{-A+1\pm\sqrt{(A-1)^2-4B}}{2}} F\left(\frac{x}{y}\right)$$

où l'on voit que chaque exposant de y est une des racines de l'équation $a^2 + (A-1)a + B = 0$

Donc si l'on représente par P' & P ces deux racines, l'intégrale finie sera

$$z = y^P f\left(\frac{x}{y}\right) + y^{P'} F\left(\frac{x}{y}\right)$$

ou bien $z = y^{P'} f\left(\frac{x}{y}\right) + y^P F\left(\frac{x}{y}\right)$

Or ces deux équations sont identiques ; donc &c.

Il est facile de s'assurer de l'exactitude de cette intégrale, par la différentiation, car on aura, en ne conservant que les caractères f & F pour abbréger,

$$Ax\frac{\delta z}{dx} = Ay^P\frac{x}{y}f' \cdots + Ay^{P'}\frac{x}{y}F'$$

$$Ay\frac{dz}{dy} = -Ay^P\frac{x}{y}f' + APy^P f - Ay^{P'}\frac{x}{y}F' + AP'y^{P'}F$$

$$x^2\frac{\delta\delta z}{dx^2} = y^P\frac{x}{y}f' + y^P\frac{x^2}{y^2}f'' + y^{P'}\frac{x}{y}F' + y^{P'}\frac{x^2}{y^2}F'' - y^P\frac{x}{y}f' - y^{P'}\frac{x}{y}F'.$$

$$2xy\frac{\delta dz}{dxdy} = -2y^P\frac{x}{y}f' - 2y^P\frac{x^2}{y^2}f'' + 2Py^P\frac{x}{y}f' - 2y^{P'}\frac{x}{y}F' - 2y^{P'}\frac{x^2}{y^2}F' + 2P'y^{P'}\frac{x}{y}F$$

$$y^2\frac{ddz}{dy^2} = \begin{cases} y^P\frac{x}{y}f' - Py^P\frac{x}{y}f' + y^P\frac{x^2}{y^2}f'' + P^2y^Pf - Py^P\frac{x}{y}f' \\ + y^P\frac{x}{y}f' - Py^Pf + y^{P'}\frac{x}{y}F' - P'y^{P'}\frac{x}{y}F' + y^{P'}\frac{x^2}{y^2}F'' \\ + P'^2y^{P'}F - P'y^{P'}\frac{x}{y}F' + y^{P'}\frac{x}{y}F' - P'y^{P'}F \end{cases}$$

$$Bz = By^Pf + By^{P'}F$$

ajoutant ensemble toutes ces quantités, on trouvera

$$\left.\begin{array}{l} x^2\frac{\delta\delta z}{dx^2}+2xy\frac{\delta\, dz}{dxdy}+y^2\frac{dd z}{dy^2} \\ +A\left\{\frac{x\delta z}{dx}+y\frac{dz}{dy}\right\} \\ +B\,\zeta \end{array}\right\} = y^P f\left(\frac{x}{y}\right)\left\{P^2+(A-1)P+B\right\} + y^{P'}F\left(\frac{x}{y}\right)\left\{P'^2+(A-1)P'+B\right\}$$

Quantité qui, parceque les fonctions f & F ſont indépendantes, ne peut devenir $=0$, que chacun des coëfficiens

$$P^2+(A-1)P+B \;\&\; P'^2+(A-1)P'+B$$

ne ſoit $=0$ & par conſéquent que les expoſans P & P' ne ſoient les racines inégales de l'équation commune $P^2+(A-1)P+B$. Je dis que les racines P & P' doivent être inégales, parcequ'autrement l'intégrale $\zeta = y^P f\left(\frac{x}{y}\right) + y^{P'}F\left(\frac{x}{y}\right)$ ſe réduiroit à $\zeta = y^P f\left(\frac{x}{y}\right)$ & ne ſeront plus complettes, puis qu'elles ne renfermeront plus qu'une fonction arbitraire.

Remarque II.

L'intégrale du problême précédent étant

$$V+aV'+bV''+cV'''\ldots \&c. = y^{a+m-1-A}F\left(\frac{x}{y}\right)+y^{a+m-1-A}K'$$

il ſuit qu'elle eſt de même forme que la propoſée, que par conſéquent on l'intégrera de la même maniere, & que ſon intégrale ſera encore de même forme c'eſt-à-dire

$$V+a'V''+b'V'''\ldots \&c. = y^P f\left(\frac{x}{y}\right)+y^{P'}F\left(\frac{x}{y}\right)+K''$$

Les expoſans P, & P' devant ſe trouver en fonction de a, b, $c\ldots$ &c. d'où il eſt facile de conclure que l'intégrale finie de la propoſée doit être de cette forme

$$\zeta = y^P\varphi\left(\frac{x}{y}\right)+y^{P'}\Psi\left(\frac{x}{y}\right)+y^{P''}f\left(\frac{x}{y}\right)+y^{P'''}F\left(\frac{x}{y}\right)\ldots \&c.+M$$

les expoſants P, P', P', $P'''\ldots$ &c. étant conſtans &

dépendans des coëfficiens A, B, $C \cdots$ &c. & le terme M dépendant du second membre K, de manière que si l'on a $K = 0$, on aura aussi $M = 0$. Il s'agit actuellement de trouver ce terme M & les exposans P, P', $P'' \cdots$ &c. or ces exposans P, $P' \cdots$ &c. sont indépendans de K, ainsi pour les trouver plus simplement, je supposerai $K=0$, je chercherai ensuite la forme du terme M.

PROBLÊME XI.

Intégrer en quantités finies l'équation $W + AV + BV' + CV'' + DV''' \cdots$ &c. $= 0$

Solution.

On vient de voir que l'intégrale démandée est de la forme $z = y^P \varphi\left(\frac{x}{y}\right) + y^{P'} \Psi\left(\frac{x}{y}\right) + y^{P''} f\left(\frac{x}{y}\right) \cdots$ &c.

Il ne s'agit donc plus que de différencier cette équation pour trouver le rapport des exposans P, $P' \cdots$ &c. aux coëfficiens A, B, $C \cdots$ &c. mais l'opération n'étant pas praticable sous cette généralité, je vais prendre des cas particuliers.

On a déjà vû que dans le cas de $m = 2$, si l'on fait $z = y^P \varphi\left(\frac{x}{y}\right) + y^{P'} \Psi\left(\frac{x}{y}\right)$, on a $W + AV + BZ = y^P \varphi\left(\frac{x}{y}\right)\left(P^2 + (A-1)P + B\right) + y^{P'} \Psi\left(\frac{x}{y}\right)\left(P'^2 + (A-1)P' + B\right)$ quantité qui ne peut devenir $= 0$, que les exposans P & P' ne soient les racines de l'équation $P^2 + (A-1)P + B = 0$ on trouvera de la même manière pour le cas de $m = 3$ qu'en faisant $z = y^P \varphi\left(\frac{x}{y}\right) + y^{P'} \Psi\left(\frac{x}{y}\right) + y^{P''} f\left(\frac{x}{y}\right)$ l'on ne peut avoir $W + AV + BV' + CZ = 0$ que les expo-

ſans ne ſoient les racines de l'équation $P^3 + P^2 (A-(2+1)) + P (B-A+2\cdot 1) + C = 0$

Si l'on a $m = 4$, on trouvera qu'en feſant $z = y^p \varphi \left(\frac{x}{y}\right) + y^{p'} \vdash \left(\frac{x}{y}\right) + y^{p''} f \left(\frac{x}{y}\right) + y^{p'''} F \left(\frac{x}{y}\right)$ on ne peut avoir $W + AV + BV' + CV'' + DZ = 0$ que les expoſans ne ſoient les racines inégales de

$$P^4 + P^3 \left\{ A-(3+2+1) \right) + P^2 \left\{ B-(2+1)A+3(2+1)+2\cdot 1 \right\} + P \left\{ C-B+2\cdot 1 A-3\cdot 2 \right\} + D = 0$$

Dans le cas de $m = 5$, on trouvera que les cinq expoſans doivent être les racines de l'équation

$$P^5 + P^4 \left\{ A-(4+3+2+1) \right\} + P^3 \left\{ B-(3+2+1)A+4(3+2+1)+3(2+1)+2\cdot 1 \right\}$$

$$+ P^2 \left\{ C-(2+1)B+3(2+1)+2\cdot 1 \right\} A-4 \left\{ 3(2+1)+2\cdot 1-3(2\cdot 1) \right\} + P \left\{ D-C+2B-3\cdot 2 A+4\cdot 3\cdot 2 \right\} + E = 0$$

En continuant ainſi de ſuite, on trouvera facilement la loi ſuivant laquelle ſe forme cette équation, & l'on reconnoitra qu'elle eſt toujours de la forme ſuivante

$P^m + P^{m-1} (A-\alpha) + P^{m-2} (B-\alpha' A+\beta) + P^{m-3} (C-\alpha'' B+\beta' A-\gamma) + P^{m-4} (D-\alpha''' C+\beta'' B-\gamma' A+\delta) \cdots \&c. = 0$

dans laquelle les quantités α, α', α'', α''' $\cdots$ &c., β, β', β'', β''' $\cdots$ &c. γ, γ', γ'', γ''' $\cdots$ &c. δ, δ' $\cdots$ &c. ſont des nombres dont voici la formation.

1° Si l'on retranche le premier des termes dont eſt compoſé α on aura α', de même ſi l'on retranche le premier terme de α' on aura α'' & ainſi de ſuite. La même choſe a lieu pour tous les autres nombres répreſentés par le même caractère; ainſi en retranchant le premier terme dont eſt compoſé β on a β', de même

on forme β'' en effaçant le premier terme de β', il en est de même pour la suite des nombres $\gamma, \gamma' \gamma'' \gamma''' \ldots$ &c. $\delta \cdot \delta' \ldots$ &c. de manière que tous ces nombres seront connus si on connoît les premiers de chaque suite, c'est-à-dire $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ &c.

2° Il est aisé de voir que α est $= (m-1) + (m-2) + (m-3) + (m-4) \ldots 0$

que β est $= (m-1)\alpha' + (m-2)\alpha'' + (m-3)\alpha''' + (m-4)\alpha'' \ldots$ &c.

que γ est $= (m-1)\beta' + (m-2)\beta'' + (m-3)\beta''' + (m-4)\beta'' \ldots$ &c.

que δ est $= (m-1)\gamma' + (m-2)\gamma'' + (m-3)\gamma''' + (m-4)\gamma'' \ldots$ &c.

Il est peut être plus simple de dire que α est $= (m-1) + (m-2) + (m-3) + (m-4) \ldots$ &c., que β est la somme des produits de ces quantités prises 2 à 2, γ la somme de leurs produits prises trois à trois ... &c. De même que α' est $= (m-2) + (m-3) + (m-4) + (m-5) \ldots$ &c. que β' est la somme des produits de ces quantités prises 2 à 2, γ' la somme de leurs produits prises 3 à 3 ... &c. Pareillement que α'' est $= (m-3) + (m-4) + (m-5) \ldots$ &c. que β'' est égal à la somme des produits de ces quantités prises 2 à 2, γ'' la somme de leurs produits prises 3 à 3 ... &c. & ainsi de suite.

Donc il sera possible de former l'équation du dégré m dont les racines doivent donner les exposans de y dans l'intégrale générale de la proposée; or on a vû qu'il n'y avoit plus rien d'indéterminé dans l'intégrale que ces exposans, donc en supposant la perfection de l'algébre, on aura toujours l'intégrale finie de l'équation

C. Q. F. T.

$$W + AV + BV' + CV'' + DV''' \ldots \text{ &c.} = 0$$

Rémarque

Les exposans $P, P, P'' \ldots$ &c. doivent être les racines inégales de l'équation que nous venons de trouver,

parcequ'autrement le nombre des fonctions arbitraires de l'intégrale deviendroit moindre que le dégré de la différentielle de la propoſée, & que cette intégrale ne ſeroit plus complete. En effet ſi l'on ſuppoſe $P=P'$ l'équation $z = y^P \varphi\left(\frac{x}{y}\right) + y^P \downarrow\left(\frac{x}{y}\right)$ ſe réduit à $z = y^P \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ qui n'eſt que l'intégrale incomplete d'une équation en différentielles partielles du ſecond dégré. Or il peut arriver que l'équation qui donne les valeurs des expoſans ait toutes ces racines égales, donc il peut arriver des cas où la méthode précédente ne donne pas l'intégrale complete de la propoſée. Le problême ſuivant remédie à cet inconvénient.

PROBLÊME XII.

Compléter l'intégrale de l'équation $W + AV + BV' + CV'' + DV''' \ldots$ &c. $= 0$ lorſque les expoſans P, P', $P'' \ldots$ &c. ſont égaux.

Solution.

On intégrera d'abord une fois la propoſée, & d'après tout ce qui précéde, il eſt clair que l'on aura pour intégrale premiére & complete

$$V + aV' + bV'' + cV''' \ldots \text{ \&c.} = y^P \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

De plus en feſant (comme dans le problême X) $V' + a'V'' + b'V'' \ldots$ &c. $= \omega$ on mettra cette intégrale ſous la forme ſuivante

$$x\frac{\delta\omega}{dx} + y\frac{d\omega}{dy} \dotplus H\omega = y^P \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

dans laquelle la quantité H eſt une conſtante fonction de A, B, $C \ldots$ &c. Or nous avons vû que l'intégrale de

cette équation eſt

$$\omega = y^{-H} \Psi \left(\frac{x}{y}\right) + y^{P} \varphi \left(\frac{x}{y}\right)$$

Donc puiſque les expoſans P, P', P''... &c., par hypothèſe, ſont égaux, il faut que l'on ait $P = -H$, d'où il ſuit que la transformée doit être

$$x \frac{\delta \omega}{dx} + y \frac{d \omega}{dy} - P \omega = y^{P} \varphi \left(\frac{x}{y}\right).$$

Pour intégrer cette équation ſoit $d\omega = p\,dx + q\,dy$, ce qui donne $px + qy - P\omega = y^{P} \varphi \left(\frac{x}{y}\right)$, on aura $d\omega = pdx + \frac{P\omega}{y} dy + y^{P-1} dy \varphi \left(\frac{x}{y}\right) - \frac{px}{y} dy$ ou bien

$$y\,d\omega - P\omega\,dy = p y^{2} \left\{\frac{ydx - xdy}{y^{2}}\right\} + y^{P} dy \varphi \left(\frac{x}{y}\right)$$

on rendra le premier membre différentielle complete en diviſant tout par y^{P+1} & l'on mettra après l'opération l'équation précédente ſous cette forme

$$\frac{y^{P} d\omega - P\omega y^{P-1} dy}{y^{2P}} = p y^{1-P} \left\{\frac{ydx - xdy}{y^{2}}\right\} + y^{-1} dy \varphi \left(\frac{x}{y}\right)$$

dans laquelle le premier membre eſt $= d \frac{\omega}{y^{P}}$. Mais le dernier terme $\frac{dy}{y} \varphi \left(\frac{x}{y}\right)$ eſt

$$= d \left(\log. y \cdot \varphi \left(\frac{x}{y}\right) \right) - l. y \left\{\frac{ydx - xdy}{y^{2}}\right\} \varphi' \left(\frac{x}{y}\right);$$

donc cette équation ſe réduit à

$$d\left(\frac{\omega}{y^{P}}\right) = \left(p y^{1-P} - \log. y \varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\right)\left\{\frac{ydx - xdy}{y^{2}}\right\} + d\left\{\log. y \varphi\left(\frac{x}{y}\right)\right\}$$

dont l'intégrale ne peut être que

$$\omega y^{-P} = \Psi \left(\frac{x}{y}\right) + \log. y \varphi \left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\text{ou } \omega = y^P \Psi\left(\frac{x}{y}\right) + y^P \log. y\, \varphi\left(\frac{x}{y}\right).$$

dans laquelle les expoſans de y ſont égaux à la verité, mais ſans que les deux fonctions arbitraires ſe réduiſent, le ſecond étant multiplié par log. y. Ainſi l'intégrale deuxième dans l'hypothèſe des racines égales eſt

$$V' + xV'' + bV''' + cV'''' \ldots \&c. = y^P \Psi\left(\frac{x}{y}\right) + y^P \log. y\, \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

On transformera cette équation, comme la précédente en celleci

$$x\frac{\delta\omega'}{dx} + y\frac{d\omega'}{dy} + H'\omega = y^P \Psi\left(\frac{x}{y}\right) + y^P \text{ l. } y\, \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

& l'on trouvera de la même manière que les expoſans étant égaux, l'on doit avoir $H' = -P$ d'où il ſuit qu'en feſant $d\omega = p\,dx + q\,dy$, on aura de même que précédemment

$$y\,d\omega - P\omega\,dy = py^2 \left\{\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\right\} + y^P\,dy\,\Psi\left(\frac{x}{y}\right)$$
$$+ y^P \text{ l. } y\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right) dy$$

En diviſant par y^{P+1}, on rendra le premier membre différentielle complete, & l'on aura

$$d\left(\omega y^{-P}\right) = py^{1-P}\left\{\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\right\} + \frac{dy}{y}\Psi\left(\frac{x}{y}\right)$$
$$+ \text{l. } y. \frac{dy}{y}\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

ou parceque

$$\frac{dy}{y}\Psi\left(\frac{x}{y}\right) \text{ eſt} = d\left(\log. y\,\Psi\left(\frac{x}{y}\right)\right) - \log. y\left\{\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\right\}\Psi'\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\& \text{ l. } y\frac{dy}{y}\varphi\left(\frac{x}{y}\right) = d\left(\frac{(\log. y)^2}{2}\varphi\left(\frac{x}{y}\right)\right) - \frac{1}{2}(\log. y)^2\left\{\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\right\}\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)$$

on aura

$$d\left(\omega y^{-P}\right) = \left(py^{1-P} - \log. y\,\Psi'\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{1}{2}(\log. y)^2\,\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\right)\left\{\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\right\}$$

$$+d\left\{\log.y\,\Psi\left(\frac{x}{y}\right)\right\}+\frac{1}{2}d\left\{(\log.y)^2\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)\right\}$$

dont l'intégrale ne peut être que

$$\omega y^{-P}=F\left(\frac{x}{y}\right)+\log.y\Psi\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{2}(\log.y)^2\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$ ou bien

multipliant par y^P, & négligeant le coëfficient $\frac{1}{2}$ à cause que la fonction φ est arbitraire, on aura pour intégrale troisième & complete de la proposée

$$V''+a''V'''+b''V''''\ldots\ \&c.=y^P\,F\left(\frac{x}{y}\right)+y^P\log.y\Psi\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$+y^P\,(\log.y)^2\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

On fera la même opération sur cette troisième intégrale $\ldots$ &c. d'où l'on conclurra que l'intégrale complete de la proposée, lorsque les exposants P, P', $P''\ldots$ &c. sont égaux, est

$$z=y^P\,F\left(\frac{x}{y}\right)+y^P\log.y\,F'\left(\frac{x}{y}\right)+y^P\,(\log.y)^2\Psi\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$+y^P\,(\log.y)^3\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)\ldots\ \&c.$$

C. Q. F. T.

Corollaire.

Si les racines P, P', $P''\ldots$ &c. dont le nombre est $=m$ n'étoient pas toutes égales mais qu'il n'y en eut qu'un certain nombre $=m-n$, on intégreroit d'abord la proposée un nombre de fois $=n$, & l'on auroit son intégrale $n^{ième}$ complete; ensuite en l'intégreroit $(m-n)$ fois connue dans le problême précédent, & son intégrale finie & complete seroit par conséquent

$$\zeta = \begin{cases} y^P f\left(\frac{x}{y}\right) + y^{P'} f'\left(\frac{x}{y}\right) + y^{P''} f''\left(\frac{x}{y}\right) + y^{P'''} f'''\left(\frac{x}{y}\right) \ldots \&c. \\ + y^P \cdot \log. y \, F\left(\frac{x}{y}\right) + y^P (\log. y)^2 F'\left(\frac{x}{y}\right) \\ + y^P (\log. y)^3 F''\left(\frac{x}{y}\right) \cdots \&c. \end{cases}$$

Le nombre des termes de la seconde suite étant $(m-n-1)$ & $(1+n)$ étant celui des termes de la première.

PROBLÉME XIII.

Intégrer en quantités finies l'équation générale $W + AV + BV' + CV'' + DV''' \cdots \&c. = K$, le second membre K étant composé par voie d'addition & soustraction d'un nombre quelconque de quantités de ces formes $Y\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ & $X\,\Psi\left(\frac{x}{y}\right)$. Y & X sont correspondamment des fonctions quelconques données la première de y & la seconde de x.

Solution.

Supposons d'abord que le second membre K contienne seulement $Y\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$, on mettra la proposée sous cette forme $x\frac{\delta\omega}{dx} + y\frac{d\omega}{dy} = P\omega + Y\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$; P étant une des racines de l'équation qui donneroit les exposans de y dans l'intégrale de la proposée, si l'on avoit $K = 0$: Or nous avons vû (probl. VII.) que l'intégrale de cette transformée est $\omega = y^P F\left(\frac{x}{y}\right) + y^P \varphi\left(\frac{x}{y}\right) \int \frac{Y\,dy}{y^{P+1}}$, donc l'intégrale première sera

$$V+aV'+bV''+CV'''\ldots\ \&c.=y^{P}F\left(\frac{x}{y}\right)+y^{P}\varphi\left(\frac{x}{y}\right)\int\frac{Y\,dy}{y^{P+1}}$$

on transformera de même celleci en

$$x\frac{\delta\omega'}{dx}+y\frac{d\omega'}{dy}=P'\omega'+y^{P}F\left(\frac{x}{y}\right)+y^{P}\varphi\left(\frac{x}{y}\right)\int\frac{Y\,dy}{y^{P+1}}$$

P' étant la ſeconde racine de l'equation qui donne les expoſans & l'on aura en intégrant

$$\omega'=y^{P'}F'\left(\frac{x}{y}\right)+y^{P}F\left(\frac{x}{y}\right)+y^{P}\varphi\left(\frac{x}{y}\right)\int\left(\frac{y^{P}\,dy}{y^{P'+1}}\int\frac{Y\,dy}{y^{P+1}}\right)$$

En intégrant encore une fois on trouvera

$$\omega''=y^{P''}F''\left(\frac{x}{y}\right)+y^{P'}F\left(\frac{x}{y}\right)+y^{P}F\left(\frac{x}{y}\right)$$
$$+y^{P''}\varphi\left(\frac{x}{y}\right)\int\left\{\frac{y^{P'}dy}{y^{P''+1}}\int\left\{\frac{y^{P}dy}{y^{P'+1}}\int\frac{Y\,dy}{y^{P+1}}\right\}\right\}$$

d'où l'on conclurra que K étant $=Y\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$, l'intégrale finie de la propoſée ſeroit

$$z=\left\{\begin{array}{l}y^{P}F\left(\frac{x}{y}\right)+y^{P}F'\left(\frac{x}{y}\right)+y^{P''}F''\left(\frac{x}{y}\right)+y^{P'''}F'''\left(\frac{x}{y}\right)..\ \&c.\\ +y^{P'''m}\varphi\left(\frac{x}{y}\right)\left\{..\int\left\{\frac{y^{P''}dy}{y^{P'''+1}}\int\left\{\frac{y^{P}dy}{y^{P''+1}}\int\left\{\frac{y^{P}dy}{y^{P'+1}}\right.\right.\right.\right.\\ \left.\left.\left.\left.\int\frac{Y\,dy}{y^{P+1}}\right\}\right\}\right\}\ldots.\}\end{array}\right\}$$

La ſeconde ſuite qui eſt ici indéfinie à cauſe de l'expoſant indéterminé m, doit être pouſſée juſqu'à ce qu'on ait empoyé toutes les racines P, P', $P''\ldots$ &c. c'eſt à-dire que pour avoir ſon expreſſion finie il faut intégrer un nombre de fois $=m$.

Si le terme K au lieu d'être $=Y\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ étoit $=Y'\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)$, on auroit dans l'intégrale qui donne la valeur de z une ſeconde ſuite de même forme ; donc quel-

que nombre des quantités de cette forme $Y\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ que K renferme, l'intégrale de la propoſée, en vertu du Théorême démontré ci-devant, ſera compoſée 1.° de la première ſuite $y^P F\left(\frac{x}{y}\right) + y^{P'} F'\left(\frac{x}{y}\right) \ldots$ &c. plus d'autant de ſuites de mêmes formes que la ſeconde, mais où il faudra mettre ſucceſſivement $Y, Y', Y'' \ldots$ &c. pour Y & $\varphi, \varphi', \varphi'' \cdots$ &c. pour φ.

Actuellement ſuppoſant que le ſecond membre K ne renferme que $X\,\Psi\left(\frac{x}{y}\right)$, on mettra la propoſée ſous cette forme $x\frac{\delta\omega}{dx} + y\frac{d\omega}{dy} = Q\omega + X\Psi\left(\frac{x}{y}\right)$, Q étant une conſtante dont je ferai voir la nature, & par la méthode du problême VIII on trouvera que cette équation a pour intégrale.

$$\omega = x^Q F\left(\frac{x}{y}\right) + x^Q \Psi\left(\frac{x}{y}\right) \int \frac{X\,dx}{x^{Q+1}}$$

ou parceque l'on a $x^Q F\left(\frac{x}{y}\right) = y^Q \cdot \frac{x^Q}{y^Q} F\left(\frac{x}{y}\right) = y^Q F\left(\frac{x}{y}\right)$ la fonction F étant arbitraire on aura pour intégrale $\omega = y^Q F\left(\frac{x}{y}\right) + x^Q \Psi\left(\frac{x}{y}\right) \int \frac{X\,dx}{x^{Q+1}}$. Mais par le Théorême le terme $y^Q F\left(\frac{x}{y}\right)$ doit être le même que ſi l'on avoit en $K = o$, & dans ce cas là on auroit $Q = P$, racine de l'équation que l'on a trouvée dans le problême XI. donc on aura pour intégrale première

$$\omega = y^P F\left(\frac{x}{y}\right) + x^P \Psi\left(\frac{x}{y}\right) \int \frac{X\,dx}{x^{P+1}}.$$

On l'intégrera de nouveau, & P' étant la ſeconde racine de l'équation qui donneroit les expoſans de y ſi l'on avoit $K = o$, on trouvera par la même méthode pour intégrale ſeconde

$$\omega' = y^{P'} F\left(\frac{x}{y}\right) + y^{P} F\left(\frac{x}{y}\right) + x^{P'} \Psi\left(\frac{x}{y}\right) \int \left\{ \frac{x^{P} dx}{x^{P'+1}} \int \frac{X dx}{x^{P+1}} \right\}$$

en continuant ainſi de ſuite, on trouvera pour intégrale finie

$$z = \begin{cases} y^{P} F\left(\frac{x}{y}\right) + y^{P} F'\left(\frac{x}{y}\right) - y^{P''} F''\left(\frac{x}{y}\right) - y^{P'} F'''\left(\frac{x}{y}\right) \cdots \&c. \\ + x^{P'+m} \Psi\left(\frac{x}{y}\right) \left\{ \cdots \int \left\{ \frac{x^{P'''} dx}{x^{P'''+1}} \int \left\{ \frac{x^{P''} dx}{x^{P''+1}} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \int \left\{ \frac{x^{P'} dx}{x^{P''+1}} \int \left\{ \frac{x^{P} dx}{x^{P+1}} \int \frac{X dx}{x^{P+1}} \right\} \right\} \right\} \right\} \cdots \end{cases}$$

Mais par tout ce qui précéde, il eſt facile de réconnoitre que ſi le ſecond membre K étoit compoſé d'un certain nombre de quantités de cette forme $X \Psi\left(\frac{x}{y}\right)$ l'intégrale de la propoſée ſeroit compoſée 1° de la ſuite d'arbitraires $y^{P} F\left(\frac{x}{y}\right) + y^{P} F'\left(\frac{x}{y}\right) \cdots \&c.$ 2° d'autant de ſuites comme la ſeconde, qu'il y auroit de quantités $X \Psi\left(\frac{x}{y}\right) + X' \Psi'\left(\frac{x}{y}\right)$, en obſervant qu'on auroit ſucceſſivement $X, X', X'' \cdots \&c.$ pour X & $\Psi, \Psi', \Psi'' \cdots \&c.$ pour Ψ.

Donc en joignant (en vertu du Théorême) les deux parties de la ſolution on trouvera pour intégrale générale & finie de la propoſée

$$z = \begin{cases} y^{P} F\left(\frac{x}{y}\right) + y^{P'} F'\left(\frac{x}{y}\right) + y^{P''} F''\left(\frac{x}{y}\right) + y^{P'''} F'''\left(\frac{x}{y}\right) \cdots \&c. \\ + y^{P'''+m} \varphi\left(\frac{x}{y}\right) \left\{ \cdots \int \left\{ \frac{y^{P''} dy}{y^{P'''+1}} \int \left\{ \frac{y^{P'} dy}{y^{P''+1}} \int \left\{ \frac{y^{P} d}{y^{P'+1}} \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \left. \int \frac{Y dy}{y^{P+1}} \right\} \right\} \right\} \cdots \end{cases}$$

plus à autant de termes comme le dernier qu'il y a de quantités de la forme $Y \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$, en obſervant de mettre ſucceſſivement $Y', Y'', Y''' \ldots \&c.$ & $\varphi' \varphi'' \varphi'' \ldots \&c.$

$$\left\{\begin{array}{l} + x^{P''m}\Psi\left(\frac{x}{y}\right)\left\{\ldots\int\left\{\frac{x^{P''}dx}{x^{P''+1}}\int\left\{\frac{x^{P'}dx}{x^{P''+1}}\int\left\{\frac{x^{P}dx}{x^{P'+1}}\right.\right.\right.\right. \\ \left.\left.\left.\left.\int\frac{X\,dx}{x^{P+1}}\right\}\right\}\right\}\ldots\Big\} \\ \text{Plus a autant de termes comme le précédent qu'il y a} \\ \text{dans } K \text{ de quantités de la forme } X\Psi\left(\frac{x}{y}\right), \text{ en ob-} \\ \text{ſervant d'employer ſucceſſivement } X', X'', X''' \ldots \&c. \\ \& \Psi'\ \Psi''\ \Psi''' \ldots \&c. \end{array}\right\} =$$

C. Q. F. T.

Remarque I.

Il importe peu dans quel ordre on emploie les racines P, P', $P''\ldots$ &c. pour former les termes déterminés de cette équation, on aura toujours le même réſultat pourvû qu'on les emploie toutes; car on ſait que ſi M, N, $L\ldots$ ſont des fonctions de x, l'on aura

$$\int(M\,dx\int(N\,dx\int L\,dx)) = \int(N\,dx\int(M\,dx\int L\,dx)) = \int(N\,dx\int(L\,dx\int M\,dx)) = \ldots \&c.$$

Rémarque II.

J'ai ſuppoſé dans l'intégrale précédente que toutes les racines P, P', $P''\ldots$ &c. étoient inégales, mais dans le cas où elles ſeroient toutes égales, il eſt facile de voir, (Probl. XII.) que l'on auroit pour integrale finie & complete

$$\left\{\begin{array}{l} y^P F\left(\frac{x}{y}\right) + y^P \operatorname{Log}.y\, F'\left(\frac{x}{y}\right) + y^P(\operatorname{Log}.y)^2 F''\left(\frac{x}{y}\right) \\ + y^P(\operatorname{Log}.y)^3 F'''\left(\frac{x}{y}\right) \\ + y^P\varphi\left(\frac{x}{y}\right)\left\{\ldots\int\left\{\frac{dy}{y}\int\left\{\frac{dv}{y}\int\left\{\frac{dv}{y}\int\frac{Y\,dy}{y^{P+1}}\right\}\right\}\right\}\ldots\right\} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \&c. \end{array}\right\} =$$

$$\zeta = \left\{ \begin{array}{l} +x^p \Psi\left(\frac{x}{y}\right)\left\{ \ldots \int\left\{\frac{dx}{x}\int\left\{\frac{dx}{x}\int\left\{\frac{dx}{x}\int\frac{X dx}{x^{p+1}}\right\}\right\}\right\}\ldots\right\} \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \&c. \end{array} \right.$$

car si le second membre K ne renfermoit que des termes de la forme $Y\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$, il est évident que la suite des arbitraires seroit

$$y^p F\left(\frac{x}{y}\right) + y^p \text{ Log. } y\, F'\left(\frac{x}{y}\right) + y^p (\text{Log. } y)^2 F''\left(\frac{x}{y}\right) \ldots \&c.$$

De même, si K ne contenoit que des termes de la forme $X\Psi\left(\frac{x}{y}\right)$ la suite des arbitraires seroit

$$x^p F\left(\frac{x}{y}\right) + x^p \text{ l.} x\, F'\left(\frac{x}{y}\right) + x^p (\text{ log. } x)^2 F''\left(\frac{x}{y}\right) \ldots \&c.$$

Or il est évident que ces deux suites se réduisent à la même. On a déjà vû (Probl. V. Coroll. I.), que l'on pouroit substituer y^p à x^p, il ne reste donc plus qu'à faire voir qu'on peut substituer l. y à l. x c'est-à-dire que l'on a

$$y^p \text{ l.} x\, F\left(\frac{x}{y}\right) = y^p \text{ l.} y F'\left(\frac{x}{y}\right),\ y^p (\text{l.} y)^2 F'\left(\frac{x}{y}\right) = y^p (\text{l.} x)^2 F''\left(\frac{x}{y}\right)$$

Mais l'on a $y^p \text{l.} x\, F'\left(\frac{x}{y}\right) = y^p (\text{l.} x + \text{l.} y - \text{l.} y) F'\left(\frac{x}{y}\right) = y^p \text{ l.} y F\left(\frac{x}{y}\right)$ $+ y^p \text{ l.}\left(\frac{x}{y}\right) F'\left(\frac{x}{y}\right)$ & (parceque la fonction F est arbitraire) $= y^p \text{ l.} y\, F'\left(\frac{x}{y}\right) + y^p F\left(\frac{x}{y}\right)$

De même on a $(\text{l.} x)^2 F''\left(\frac{x}{y}\right) = (\text{l.} y + \text{l.} x - \text{l.} y)^2 F''\left(\frac{x}{y}\right) =$ $= \left(\text{l.} y + l\frac{x}{y}\right)^2 F''\left(\frac{x}{y}\right) = (l\, y)^2 F'\left(\frac{x}{y}\right)$ $+ 2 \text{ l.} y\, l\frac{x}{y} F'\left(\frac{x}{y}\right) + \left(\frac{x}{y}\right)^2 F''\left(\frac{x}{y}\right)$. Donc en ajoutant ensemble ces deux valeurs, on aura $F\left(\frac{x}{y}\right) + \text{l.} x\, F\left(\frac{x}{y}\right)$

$$+(\mathrm{l}.x)^2 F''\left(\frac{x}{y}\right) = \begin{matrix} F\left(\frac{x}{y}\right) \\ +F\left(\frac{x}{y}\right)+\mathrm{l}.yF'\left(\frac{x}{y}\right) \\ +F\left(\frac{x}{y}\right)+2\,\mathrm{l}.y\,F'\left(\frac{x}{y}\right)+(\mathrm{l}.y)^2F'\left(\frac{x}{y}\right) \end{matrix}$$

(ou bien confondant les fonctions arbitraires) $= F\left(\frac{x}{y}\right)$ $+ \mathrm{l}.\,y\,F'\left(\frac{x}{y}\right) + (\mathrm{l}.y)^2 F''\left(\frac{x}{y}\right)$. Il en seroit de même pour un plus grand nombre de termes, donc &c.
Ceci n'avoit pas besoin d'une démonstration particulière, c'étoit une suite immédiate du Théorême.

Corollaire I.

Si les racines P, P', $P''\ldots$ &c. se surpassent toutes les unes les autres de l'unité, c'est-à-dire que l'on ait $P = P' + 1$, $P' = P'' + 1 \cdots$ &c., les termes déterminés de l'intégrale générale deviendront

$$\Phi\left(\frac{x}{y}\right)\int^m \frac{Y\,dy^m}{y^{P+1}} + \Phi'\left(\frac{x}{y}\right)\int^m \frac{Y'dy^m}{y^{P+1}}\cdots \&c. + \Psi\left(\frac{x}{y}\right)\int^m \frac{X dx^m}{x^{P+1}}$$
$$+ \Psi'\left(\frac{x}{y}\right)\int^m \frac{X'dx^m}{x^{P+1}} \cdots \&c.$$

Or si l'on a $A = 0$, $B = 0$, $C = 0 \cdots$ &c. l'équation du problême XI a non seulement les racines en progression arithmétique dont la différence est 1, mais on a encore $P = m - 1$, donc alors les termes déterminés de l'intégrale seront

$$\Phi\left(\frac{x}{y}\right)\int^m \frac{Y dy^m}{y^m} + \Phi'\left(\frac{x}{y}\right)\int^m \frac{Y'dy^m}{y^m}\cdots \&c. + \Psi\left(\frac{x}{y}\right)\int^m \frac{X\,dx^m}{x^m}$$
$$+ \Psi'\left(\frac{x}{y}\right)\int^m \frac{X'\,dx^m}{x^m} \cdots \&c.$$

Ce qui revient au cas du problême IX, & donne le même réſultat que l'on a déjà trouvé.

Corollaire II.

L'intégrale générale du problême précédent eſt de la forme $z = K + L\varphi u + M\varphi' u + N\varphi'' u \cdots$ &c. Or j'ai fait voir dans le mémoire qui a pour objet la détermination des fonctions arbitraires, qu'il eſt toujours poſſible de déterminer les fonctions de cette équation, de manière qu' elle ſatisfaſſe à autant de conditions particulières, analogiques ou non, qu'il y a de fonctions arbitraires, donc il ſera toujours poſſible de conſtruire la ſurface courbe qui auroit pour équation

$$W + AV + BV' + CV'' + DV''' \cdots \text{&c.} = K$$

quand même les courbes à double courbure données, par leſquelles on ſeroit obligé de la faire paſſer & dont le nombre eſt $= m$, ſeroient diſcontinues, & données au hazard dans l'eſpace.

SUR LA FIGURE DES COLONNES

PAR M. DE LA GRANGE.

1 On a coutume de donner aux colonnes la figure d'un conoide qui ait sa plus grande largeur vers le tiers de sa hauteur, & qui aille de là en diminuant vers les deux extrémités; d'où résulte ce qu'on appelle vulgairement le *renflement* & la *diminution* des colonnes; mais personne que je sache n'a encore donné une raison satisfaisante de cette pratique; car je ne crois pas qu'on puisse regarder comme telle celle que la pluspart des Auteurs, qui ont écrit sur cette matière, apportent, & qui consiste dans la ressemblance qu'ils prétendent qu'une colonne doit avoir avec le corps humain. Il me paroît au contraire qu'il seroit bien plus naturel de faire les colonnes plus minces en haut qu'en bas, & cela à l'imitation des troncs d'arbres qu'on a du nécessairement employer dans les premiers bâtimens; c'est ainsi que les anciens Architectes en ont usé, comme on le voit par les ouvrages antiques qui sont restés à Rome, dans lesquels la plus grande partie des colonnes commencent à avoir leur diminution dès le bas; mais comme Vitruve qui est devenu le legislateur des Architectes modernes, prescrit formellement le *renflement* des colonnes en disant qu'il faut ajouter quelque chose à leur milieu (liv. III chap. 2) quoique par la perte qu'on a faite des figures qui étoient jointes à son ouvrage, on ignore la méthode dont il s'y prenoit pour tracer la ligne du contour des colonnes, l'usage de renfler les colonnes au milieu, & de les diminuer aux deux extrémités est devenu général, & on ne varie plus que sur la courbe qui doit former le renflement & la diminution.

Palladio propose pour cela un moyen mécanique qui consiste à plier tant soit peu une règle de bois; Vignole

donne deux eſpèces de conſtructions géometriques par leſquelles on peut décrire le profil d'une colonne par pluſieurs points ; enfin M. Blondel a imaginé de faire ſervir à ce deſſein l'inſtrument de Nicomede, en ſorte que le profil de la colonne ait la figure d'une concoide. Il ſeroit très-aiſé d'inventer pluſieurs autres moyens pour remplir le même objet, car tant qu'il n'y a d'autres données que l'epaiſſeur de la colonne aux deux extrémités, & au point du plus grand renflement, il eſt clair que le problême eſt très indéterminé, puiſqu'il ne s'agit que de faire paſſer une ligne courbe & concave vers l'axe par trois points donnés. Mais n'y auroit-il pas dans la nature même de la choſe quelque principe qui pût ſervir à déterminer la queſtion ? Parmi ceux qui ſervent de fondement à l'architecture il n'y en a qu'un ſeul qui ait des regles fixes & invariables, & par conſéquent ſuſceptibles de calcul ; c'eſt la ſolidité ; il faut donc examiner ſi on peut déduire de cette conſidération les conditions néceſſaires pour la détermination & la ſolution du problême dont-il s'agit ; c'eſt l'objet du Mémoire qu'on va lire.

2 Comme les colonnes ſont toujours deſtinées à ſupporter des charges plus ou moins conſidérables, ſuivant les circonſtances où on les emploie, il eſt évident que ſi une colonne eſt trop chargée, elle commencera à ſe courber un peu du côté où la matière fera moins de réſiſtance, après quoi elle ſe caſſera faute d'elaſticité, ſurtout ſi c'eſt une colonne de pierre, ou de briques ; or il n'eſt pas difficile de comprendre que la courbure ſuivant laquelle la colonne ſe pliera ſera différente ſuivant la figure même de la colonne ; de ſorte qu'à hauteurs, & à maſſes égales la force d'une colonne pourra être plus ou moins grande ſuivant la nature de la courbe qui en formera le profil. Ainſi c'eſt un problême de *maximis & minimis* de

déterminer la courbe qui, par sa rotation autour de son axe, formera une colonne capable de supporter la plus grande charge possible, la hauteur & la masse de la colonne étant données; c'est là, ce me semble, le véritable point de vue, sous le quel on doit envisager la question du *renflement*, & de la *diminution* des colonnes.

3 Quoique la théorie de la force des colonnes entant qu'elle dépend de leur figure ait déja fait le sujet d'un très beau Mémoire que M. Euler a donné dans le volume de l'Académie de Berlin pour l'année 1757; cependant comme le point de vue sous lesquel cet illustre Auteur a discuté cette matière est différent de celui dans lequel nous nous proposons de la traiter, nous croyons faire quelque plaisir aux Géometres en leur communiquant les recherches que nous avons faites sur un sujet, qui intereſſe également la Mécanique & l'Analyse.

4 Soit $A\ M\ B$ (fig. 1) une colonne dressée verticalement en A, & chargée à l'autre extremité B par un poids qui l'oblige à se courber infiniment peu, ensorte qu'elle prenne la figure $A\ N\ B$. Supposons d'abord que cette colonne soit d'une figure cilindrique, & que F soit la force absolue qu'elle a dans chaque point pour résister à être pliée, & qui sera par conséquent la même par tout, suivant la loi générale des corps élastiques, cette force croitra en raison de l'angle de courbure; de sorte que dans l'état $A\ N\ B$, la force de la colonne a un point quelconque N sera proportionelle à $\frac{K}{\rho}$, en designant par ρ le rayon osculateur de la courbe $A\ N\ B$. D'un autre côté, si on nomme P le poids comprimant à l'extrémité B, il est facile de voir que le moment de ce poids par rapport au point N sera exprimé par $P \times M\ N$; de sorte que la condition de l'equilibre donnera d'abord cette équation $P \times M\ N = \frac{K}{\rho}$ d'où on pourra connoitre

tant la nature de la courbe $A\ N\ B$, que la valeur de P.

5 Nommons pour cela les abſciſſes $A\ M = x$, & les ordonnées $M\ N = y$; & comme on ſuppoſe que la courbure de la colonne ſoit partout infiniment petite, on aura y infiniment petit par rapport à x & dy infiniment petit par rapport à dx; de ſorte que l'élément de la courbe $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ ſera à tres peu près & ſans erreur ſenſible $= dx$. Or on ſait qu'en prenant dx conſtant on a $\rho = \frac{ds^3}{-dx\,dy^2}$; donc on aura dans notre cas $\rho = \frac{dx^3}{-dy^2}$; par conſéquent l'équation à la courbe $A\,N\,B$ ſera $P\,y = -\frac{K\,dy^2}{dx^2}$, c'eſt à dire $P\,y + \frac{K\,dy^2}{dx^2} = o$.

Il faudra donc intégrer d'abord cette équation, enſuite faire en ſorte que l'expreſſion de y ſoit nulle aux deux points A, & B, c'eſt-à-dire lorſque $x = o$, & lorſque $x = A\,B$ hauteur de la colonne. Or l'intégration eſt facile, à cauſe que P & K ſont des quantités conſtantes, & l'on aura en général $y = f\,\mathit{ſin.}\,(x\sqrt{\frac{P}{K}} + g)$ f & g étant des conſtantes arbitraires; donc ſi on nomme à la hauteur donnée de la colonne, il faudra que l'on ait f ſin $g = o$, & $f\,\mathit{ſin.}\,(\sqrt{\frac{P}{K}} + g) = o$; donc puiſqu'on ne peut pas faire $f = o$, ce qui donneroit $y = o$, il faudra faire d'abord $g = o$, & enſuite il faudra encore que l'on ait $\mathit{ſin.}\,(a\sqrt{\frac{P}{K}}) = o$; & par conſéquent que $a\sqrt{\frac{P}{K}} = m\,\pi$, π étant l'angle de 180°, & m un nombre

quelconque entier ; d'où l'on tire $P = \frac{m^2 \pi^2 K}{a^2}$, l'équation à la courbe $A N B$ deviendra par la $y = f \sin. \left(\frac{m \pi x}{a}\right)$, où la constante f demeure arbitraire, & exprime la plus grande valeur de y.

6 Si on fait $m = 1$, on aura $y = f \sin \frac{\pi x}{a}$, d'où l'on voit que la courbe $A N B$ ne coupe l'axe qu'aux deux extrémités A, & B ; & le poids requis pour donner à la colonne cette courbure sera $\frac{\pi^2 K}{a^2}$. Si $m = 2$, on aura $y = f \sin. \frac{2 \pi x}{a}$, & la courbe coupera l'axe au point où $x = \frac{a}{2}$, c'est à dire au point du milieu C, ensorte que la colonne prendra la figure 2 ; mais il faudra pour cela que le poids P soit $= \frac{4 \pi^2 K}{a^2}$, c'est-à-dire quadruple du précédent. Si on faisoit $m = 3$, on auroit $y = f \sin. \frac{3 \pi x}{a}$, de sorte que la courbe couperoit l'axe aux points où $x = \frac{a}{3}$, & $x = \frac{2a}{3}$ & seroit semblable à la figure 3, or pour que la colonne soit pliée de cette manière il faudra que le poids P soit $= \frac{9 \pi^2 K}{a^2}$, c'est-à-dire neuf fois plus grand que le premier ; & ainsi de suite.

7 Maintenant puiſque le plus petit poids qui ſoit en état de faire plier la colonne eſt $\frac{\pi^2 K}{a^2}$, il ſemble qu'on en peut conclure que tout poids qui ſera moindre que celui-ci ne fera abſolument aucun effet, & qu'ainſi on doit regarder la quantité $\frac{\pi^2 K}{a^2}$ comme la vraie meſure de la force de la colonne cylindrique $A\,B$. C'eſt par ce principe que M.r Euler a déterminé dans le Mémoire cité la force de pluſieurs ſortes de colonnes tant cylindriques que paraboloidiques, & ce ſera auſſi ſur le meme principe que nous fonderons nos recherches ſur la figure qu'on doit donner aux colonnes pour qu'elles aient la plus grande force poſſible; mais avant d'en faire uſage il eſt bon d'examiner ce qui doit arriver lorſque le poids ſera un peu différent de $\frac{\pi^2 K}{a^2}$; pour cela il faut déterminer rigoureuſement la nature de la courbe $A\,N\,B$ ſans negliger la petite différence qu'il y a entre l'elément de l'arc ds, & celui de l'abſciſſe dx.

8 Qu'on ſubſtitue donc dans l'équation $Py = \frac{K}{\rho}$ de l'art. 4 à la place de ρ ſa valeur rigoureuſe $\frac{ds^3}{-dx\,d^2y}$, & l'on aura celle-ci $Py + \frac{K\,dx\,d^2y}{ds^3} = o$ laquelle etant multipliée par dy & enſuite intégrée donne $\frac{Py^2}{2} - \frac{K\,dx}{ds} =$ à une conſtante. Pour determiner cette conſtante ſoit f la plus grande valeur de y, & comme on doit avoir au point du

du *maximum* $dy = o$, & par conſéquent $ds = dx$, on aura pour la valeur de la quantité $\frac{Py^2}{2} - \frac{Kdx}{ds}$ dans ce point, $\frac{Pf^2}{2} - K$, qui ſera donc la conſtante cherchée. Ainſi l'équation deviendra $\frac{P}{2}\left(K^2 - y^2\right) = K\left(1 - \frac{dx}{ds}\right)$; mais $dx = \sqrt{ds^2 - dy^2}$; donc $\frac{P}{2}\left(K^2 - y^2\right) = K\left(1 - \frac{\sqrt{\left(ds^2 - dy^2\right)}}{ds}\right)$ ou bien en faiſant $\frac{dy}{ds} = p$, $\frac{P}{2}\left(f^2 - y^2\right) = K\left(1 - \sqrt{\left(1 - p^2\right)}\right)$ d'où l'on tire $p = \sqrt{\left(\frac{P}{K}\left(f^2 - y^2\right) - \frac{P^2}{4K^2}\left(f^2 - y^2\right)^2\right)}$ donc, à cauſe de $ds = \frac{dy}{p}$, $ds = \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{P}{K}\left(f^2 - y^2\right) - \frac{P^2}{4K^2}\left(f^2 - y^2\right)^2\right)}}$.

On integrera donc cette équation en ſorte que y ſoit $= o$ lorſque $s = o$, enſuite on ſuppoſera auſſi $y = o$ lorſque $s = a$; & cette dernière condition ſervira à déterminer la valeur de P.

8. Puiſque la plus grande valeur de y eſt f, on peut ſuppoſer $y = f \, \mathit{ſin.}\, \varphi$, & ſubſtituant cette valeur dans l'équation précédente, elle deviendra $ds = \frac{d\varphi}{\sqrt{\left(\frac{P}{K} - \frac{P^2 f^2}{4K^2} \mathit{cos.}\, \varphi^2\right)}}$ par laquelle on déterminera la valeur de φ en s; & comme on veut que y ſoit nul lorſque $s = o$, & lorſque $s = a$ il faudra que φ ſoit $= o$ lorſque $s = o$, & que $\varphi = m\,\pi$ lorſque $s = a$. Lorſque $m = 1$ la courbe n'aura qu'un ſeul ventre comme dans la fig. 1; en faiſant $m = 2$ elle aura deux ventres comme dans la fig. 2; & ainſi de ſuite.

9. Si f eſt une quantité infiniment petite, on a à très peu près $ds = \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{P}{K}}}$, & integrant $s = \frac{\varphi}{\sqrt{\frac{P}{K}}}$; d'où faiſant $s = a$, & $\varphi = m\pi$, on a le même réſultat que ci-deſſus art. 5. Mais ſi f n'eſt pas une quantité infiniment petite, alors l'équation de l'art. préc. n'eſt point ſuſceptible d'une intégrale exacte, car la différentielle $\frac{d\varphi}{\sqrt{\left(\frac{P}{K} - \frac{P^2 f^2 \cos.\varphi^2}{4K^2}\right)}}$ dépend en général de la rectification des ſections coniques. Mais en employant les ſeries on aura

$$ds = \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{P}{K}}}\left(1 + \frac{Pf^2 \cos.\varphi^2}{2.4K} + \frac{3P^2 f^4 \cos.\varphi^4}{2.4.16K^2} + \frac{3.5P^3 f^6 \cos.\varphi^6}{2.4.6.64K^3} + \&c\right)$$

Or les différentielles $\cos.\varphi^2\, d\varphi$, $\cos.\varphi^4\, d\varphi$ &c.: ſont toutes intégrables, comme l'on ſait, & pour les intégrer il n'y a qu'à changer les puiſſances $\cos.\varphi$ en des coſinus d'angles multiples de φ par les formules connues,

$$\cos.\varphi^2 = \frac{\cos.2\varphi + 1}{2},$$

$$\cos.\varphi^4 = \frac{\cos.4\varphi + 4\cos.2\varphi + \frac{4.3}{2.2}}{8}$$

$$\cos.\varphi^6 = \frac{\cos.6\varphi + 6\cos.4\varphi + \frac{6.5}{2}\cos.2\varphi + \frac{6.5.4}{2.2.3}}{32}$$

&c.

Mais comme par l'intégration tous les coſinus deviennent des ſinus, il eſt clair qu'en faiſant $\varphi = m\pi$ tous ces termes évanouiront d'eux mêmes; c'eſt pourquoi il ſuffira

pour notre objet de considérer les termes tous constantes des valeurs de $cos.\ \varphi^2$, $cos.\ \varphi^4$ &c.: & de les substituer à la place de ces mêmes valeurs dans l'équation ci-dessus; ce qui la réduira à celle-ci :

$$ds = \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{P}{K}}}\left(1 + \frac{Pf^2}{4(8K)} + \frac{9P^2f^4}{4.16(32K^2)} + \frac{9.25P^3f^6}{4.16.36(128K^3)} + \&c.\right)$$

qui étant intégrée, donnera après y avoir fait $s = a$, & $\varphi = m\pi$,

$$a = \frac{m\pi}{\sqrt{\frac{P}{K}}}\left(1 + \frac{Pf^2}{4(8K)} + \frac{9P^2f^4}{4.16(32K^2)} + \frac{9.25.P^3f^6}{4.16.36(128K^3)} + \&c.\right)$$

par où l'on pourra déterminer la valeur de f pour chaque valeur donnée de P & de a.

10. On voit d'abord par l'équation précédente que tant que f n'est pas nul a est nécessairement $> \frac{m\pi}{\sqrt{\frac{P}{K}}}$; & par conséquent $P > \frac{m^2\pi^2K}{a^2}$; d'où il s'ensuit que la colonne ne peut être courbée que par une charge plus grande que $\frac{m^2\pi^2K}{a^2}$. En effet si on met l'équation ci-dessus sous cette forme.

$$1 - \frac{a}{m\pi\sqrt{\frac{P}{K}}} + \frac{Pf^2}{4(8K)} + \frac{9P^2f^4}{4.16(32K^2)} + \frac{9.25P^3f^6}{4.16.36(128K^3)} + \&c. = 0$$

& qu'on regarde la valeur de f^2 comme l'inconnue qu'il s'agit de déterminer, il est clair que puisque les quantités P & K sont positives de leur propre nature, la quantité f^2 n'aura que des valeurs négatives, ou imaginaires tant que $1 - \frac{a}{m\pi\sqrt{\frac{P}{K}}} > 0$, que cette quantité

aura une valeur nulle lorſque $1 - \frac{a}{m\pi}\sqrt{\frac{P}{K}} = 0$, toutes les autres étant négatives ou imaginaires ; qu' enfin la quantité f^2 aura toujours une ſeule valeur poſitive lorſque $1 - \frac{a}{m\pi}\sqrt{\frac{P}{K}} < 0$. Donc 1° la quantité f ſera toujours imaginaire lorſque $1 - \frac{a}{m\pi}\sqrt{\frac{P}{K}} > 0$, c' eſt-à-dire $P < \frac{m^2\pi^2 K}{a^2}$. 2° la quantité f aura toujours deux valeurs réelles & égales, mais l' une poſitive & l' autre negative, lorſque $1 - \frac{a}{m\pi}\sqrt{\frac{P}{K}} < 0$, ſçavoir $P > \frac{m^2\pi^2 K}{a^2}$; & n' aura point d' autres valeurs réelles. D' où il s' enſuit que tant que P ſera $< \frac{\pi^2 K}{a^2}$, la colonne ne pourra pas être courbée ; que tant que P ſera renfermée entre les limites $\frac{\pi^2 K}{a^2}$ & $\frac{4\pi^2 K}{a^2}$, la colonne ſera courbée, mais en ne formant qu' un ſeul ventre ; que tant que P ſera entre les limites $\frac{4\pi^2 K}{a^2}$ & $\frac{9\pi^2 K}{a^2}$, la colonne ſera néceſſairement courbée & pourra former ou un ſeul ventre, ou deux ; & ainſi de ſuite.

11. Nous avons donc démontré très-rigoureuſement que la quantité $\frac{\pi^2 K}{a^2}$ eſt la limite des poids que la colonne peut ſupporter ſans ſe plier ; & comme cette quantité eſt égale à la valeur que doit avoir la force P lorſque f eſt nulle, ou ce qui revient au même infiniment petite, il s' enſuit qu' on peut la trouver directement en ſuppoſant d'abord y infiniment petite dans l'équation de la courbe, comme on l' a fait dans l' art. 5, & faiſant enſorte que l'intégrale de cette équation ſatisfaſſe aux deux conditions de $y = 0$

lorſque $s = o$ & $s = a$, ou bien lorſque $x = o$ & $x = a$, parceque dans le cas de y infiniment petite, l'arc s ſe confond ſenſiblement avec l'abſciſſe x. C'eſt de cette manière qu'on pourra déterminer la limite dont il s'agit pour les colonnes qui ne ſeront pas d'une épaiſſeur uniforme & dont l'équation ſeroit abſolument intraitable par les méthodes connues ſans la ſuppoſition de y infiniment petite.

12. En effet, ſi on ſuppoſe que la colonne ne ſoit pas cylindrique, mais qu'elle ait la forme d'un conoide formé par la rotation d'une courbe quelconque autour de ſon axe, lequel ſera par conſéquent auſſi l'axe de la colonne, & qu'on nomme z l'ordonnée de cette courbe qui répond à une abſciſſe quelconque x, enſorte qu'on ait une équation entre z & x, qui ſerve à déterminer z en x; il eſt clair que $2z$ ſera le diamètre de la groſſeur de la colonne à la hauteur x depuis la baſe, & il n'eſt pas moins évident que la force abſolue avec laquelle la colonne réſiſtera dans cet endroit à être courbée ſera d'autant plus grande que la quantité $2z$ ſera plus grande; de manière que cette force pourra être regardée comme une fonction de z & per conſéquent auſſi comme une fonction de x, que nous déſignerons en général dans la ſuite par X. Ainſi il n'y aura qu'à mettre ſimplement X à la place de K dans l'équation de l'art. 5, & l'on aura

$$Py + \frac{X d^2 y}{dx^2} = o$$

par l'équation de la courbe ſuivant laquelle la colonne ſera pliée par le poids P dont on la ſuppoſe chargée, en ſuppoſant que cette courbe ſoit infiniment peu différente de la ligne droite.

13. Or puiſque dans le cas ou X étoit une quantité conſtante K on a trouvé en général pour la valeur de y

cette expreſſion $y = f\,\mathit{ſin.}\left(x\,\sqrt{\frac{P}{K}} + g\right)$, ſuppoſons maintenant $y = \xi\,\mathit{ſin.}\,\varphi$, ξ, & φ étant des fonctions inconnues de x, & l'on aura en différentiant $dy = \mathit{ſin.}\,\varphi\,d\xi + \xi\,\mathit{cos.}\,\varphi\,d\varphi$, $d^2y = \mathit{ſin.}\,\varphi\,d^2\xi + 2\,\mathit{cos.}\,\varphi\,d\varphi\,d\xi + \xi\,\mathit{cos.}\,\varphi\,d^2\varphi - \xi\,\mathit{ſin.}\,\varphi\,d\varphi^2$; donc ſubſtituant ces valeurs dans l'équation de l'art. préc. on aura

$$\left(P\,\xi + X\left(\frac{d^2\xi}{dx^2} - \frac{\xi\,d^2\varphi}{dx^2}\right)\right)\mathit{ſin.}\,\varphi + X\left(\frac{2\,d\varphi\,d\xi}{dx^2} + \frac{\xi\,d^2\varphi}{dx^2}\right)\mathit{cos.}\,\varphi = 0$$

Comme nous avons introduit deux variables indéterminées ξ & φ, nous pouvons faire diſparoître dans cette équation les *ſin.* & *cos.* de φ, en la partageant en ces deux-ci

$$P\,\xi + X\left(\frac{d^2\xi}{dx^2} - \frac{\xi\,d\varphi^2}{dx^2}\right) = 0$$

$$\frac{2\,d\varphi\,d\xi}{dx^2} + \frac{\xi\,d^2\varphi}{dx^2} = 0$$

la ſeconde étant multipliée par $\xi\,dx$, & enſuite intégrée donne $\frac{\xi^2 d\varphi}{dx} = h$, d'où l'on tire $\frac{d\varphi}{dx} = \frac{h}{\xi^2}$ & $\varphi = h\int\frac{dx}{\xi^2}$, h étant une conſtante arbitraire. Subſtituant cette valeur dans la première équation elle deviendra

$$P\,\xi + X\left(\frac{d^2\xi}{dx^2} - \frac{h^2}{\xi^3}\right) = 0$$

par laquelle il faudra déterminer la variable ξ; enſuite de quoi on aura $y = \xi\,\mathit{ſin.}\left(h\int\frac{dx}{\xi^2}\right)$.

Soit pour plus de ſimplicité $\xi^2 = h\,u$, on aura en ſubſtituant cette valeur dans l'équation en ξ celle-ci :

$$4\,P\,u^2 + X\left(\frac{2u\,d^2u - du^2}{dx^2} - 4\right) = 0 \quad .$$

& la valeur de y ſera $y = \sqrt{(hu)}.\,\mathit{ſin.}\int\frac{dx}{u}$.

14 On remarquera d'abord à l'égard de cette expreſſion de y qu'elle contient deux conſtantes arbitraires, l'une c'eſt la conſtante h qui ne ſe trouve point dans l'équation en u; l'autre c'eſt celle qui eſt virtuellement renfermée dans l'intégrale $\int\frac{dx}{u}$, c'eſt pourquoi il ſuffira d'y ſubſtituer une valeur quelconque de u qui ſatisfaſſe à l'équation en u ſans s'embaraſſer ſi elle eſt une intégrale complette de cette équation ou non.

Un autre avantage de la même expreſſion de y, c'eſt qu'elle eſt très-commode pour la détermination du poids P; car ſuivant les conditions du problême il faut, 1.° que y ſoit $= o$ lorſque $x = o$, condition qu'on remplira en prenant l'intégrale de $\int\frac{dx}{u}$ enſorte qu'elle évanouiſſe lorſque $x = o$. 2.° Il faut que y ſoit auſſi $= o$ lorſque $x = a$; & pour remplir cette condition il faudra que la valeur de l'intégrale $\int\frac{dx}{u}$ qui répond à $x = a$ ſoit $= m\,\pi$; car alors $\mathit{ſin.}\int\frac{dx}{u}$ ſera nul. Or comme la quantité u ne doit point contenir de conſtantes arbitraires, il eſt viſible que cette dernière condition donnera une équation entre les quantités P & a, par laquelle on pourra déterminer P.

Quant au nombre entier m qui demeure indéterminé, il eſt clair, par ce qu'on a vu plus haut, qu'il ſera toujours égal au nombre des ventres que la colonne formera en ſe courbant par la preſſion du poids P; donc pour avoir la limite des fardeaux que la colonne pourra ſupporter ſans ſe courber d'une manière quelconque, il faudra toujours prendre pour m le nombre entier qui rendra la valeur de P la plus petite; & cette valeur ſera la limite cherchée.

15. L'hypothese la plus simple qu'on puisse faire sur la figure des colonnes lorsqu'elles ne doivent pas être cylindriques, est de les supposer formées par la rotation d'une section conique autour de son axe; or l'équation générale d'une section conique où les abscisses sont prises dans l'axe, est comme l'on sait $z^2 = \alpha + \beta x + \gamma x^2$, x étant les abscisses, & z les ordonnées; & α, β, γ étant des constantes arbitraires; ainsi nous adopterons d'abord cette équation entre les variables z & x, & nous chercherons quelle est la valeur de P qui en résultera; mais pour cela il faut encore établir la loi qui doit avoir lieu entre les rayons z & la force X avec laquelle la colonne résiste à se courber (art. 12).

16. Il paroit que la théorie & l'expérience s'accordent assès à faire X proportionelle à z^4; comme on peut le voir par les ouvrages où cette matière est traitée; ainsi nous supposerons en général $X = K z^4$; ce qui donnera dans le cas de l'art. préc. $X = K (\alpha + \beta x + \gamma x^2)^2$; ce qui étant substitué dans l'équation en u de l'art. 13 on aura $4 P u^2 + K (\alpha + \beta x + \gamma x^2)^2 \left(\frac{2 u d^2 u - d u^2}{d x^2} - 4 \right) = 0$ équation à laquelle on peut satisfaire en faisant $u = g (\alpha + \beta x + \gamma x^2) = g z^2$; car on aura $\frac{2 u d^2 u - d u^2}{d x^2} = 4 g^2 \gamma (\alpha + \beta x + \gamma x^2) - g^2 (\beta + 2 \gamma x)^2 = g^2 (4 \alpha \gamma - \beta^2)$; de sorte qu'après les substitutions on aura $4 P g^2 + K (g^2 (4 \alpha \gamma - \beta^2) - 4) = 0$ d'où l'on tire

$$g = \sqrt{\left(\frac{4}{K} + \alpha \gamma - \frac{\beta^2}{4} \right)}.$$

Cette valeur de u n'est, comme l'on voit, qu'une intégrale particulière; mais elle suffit pour notre objet, comme on l'a fait voir plus haut (art. 14).

Main-

17 Maintenant on aura $\int \frac{dx}{u} = \int \frac{dx}{g\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)}}$; donc si on nomme A l'intégrale de $\frac{dx}{\alpha + \beta x + \gamma x^2}$ c'est-à-dire de $\frac{dx}{z^2}$, prise ensorte qu'elle soit nulle lorsque $x = o$ & complette lorsque $x = a$, on aura $\frac{A}{g}$ pour la valeur de $\int \frac{du}{u}$ répondante à $x = a$; on fera donc (art. 14) $\frac{A}{g} = m\pi$; & on tirera de là

$$P = \left(\frac{\beta^2}{4} - \alpha\gamma + \frac{m^2\pi^2}{A^2} \right) K$$

Telle est donc la valeur du poids P qui pourra faire plier la colonne infiniment peu, & comme cette valeur augmente à mésure que le nombre m est plus grand, on fera $m = 1$, pour avoir la limite des poids qui pourront être supportés par la colonne sans qu'elle soit sujette à se courber en aucune manière; ainsi la force de la colonne sera d'autant plus grande que la valeur de P sera plus grande; d'où l'on voit que la force augmentera à mésure que la quantité $\frac{\beta^2}{4} - \alpha\gamma$ croitra, & que la quantité A décroitra; ainsi ce sera une question de *maximis & minimis* de déterminer les valeurs des constantes α, β, γ pour que la force P soit la plus grande; mais comme cette force doit nécessairement augmenter à mésure que les dimensions de la colonne augmentent, on ne peut chercher qu'un *maximum* rélatif à la masse de la colonne, en supposant sa hauteur donnée; c'est sous ce point de vue que nous allons envisager la question.

18 Pour commencer par les cas les plus ſimples nous ſuppoſerons d'abord, que l'on ait $\frac{\beta^2}{4} - \alpha\gamma = o$, auquel cas l'équation du profil de la colonne deviendra $z^2 = (\sqrt{\alpha} + x\sqrt{\gamma})^2$, & tirant la racine carrée $z = \sqrt{\alpha} + x\sqrt{\gamma}$, qui eſt à une ligne droite; enſorte que dans ce cas la figure de la colonne ſera celle d'un cone tronqué; faiſons pour plus de commodité, $\sqrt{\alpha} = b$, $\sqrt{\gamma} = c$, & par conſéquent $\beta = 2bc$; on aura donc $z = b + cx$ & l'intégrale de $\frac{dx}{z^2}$ priſe de manière qu'elle ſoit nulle lorſque $x = o$, ſera $-\frac{1}{c}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{b}\right)$; donc faiſant $x = a$ on aura $A = -\frac{1}{c}\left(\frac{1}{b+ca} - \frac{1}{b}\right) = \frac{a}{b(b+ca)} = \frac{a}{bb'}$, en faiſant $b' = b + ca$; où l'on remarquera que b eſt le rayon de la baſe inférieure de la colonne, & b' celui de la baſe ſupérieure; ainſi on aura dans ce cas $P = \frac{\pi^2 K b^2 b'^2}{a^2}$.

Maintenant pour avoir la ſolidité de la colonne on remarquera que l'aire du cercle dont le rayon eſt z, étant exprimée par πz^2, il n'y aura qu'à prendre l'intégrale de $\pi z^2 dx$, depuis $x = o$ juſqu'à $x = o$, laquelle ſera $\frac{\pi}{3c}\left((b + ca)^3 - b^3\right)$, c'eſt-à-dire (à cauſe de $b + ca = b'$ & $c = \frac{b' - b}{a}$) $\frac{\pi a}{3}(b^2 + bb' + b'^2)$. Ainſi le rapport du poids que la colonne eſt en état de ſupporter au carré du poids même de la colonne ſera exprimé par $\frac{9Kb^2b'^2}{a^4(b^2 + bb' + b'^2)^2}$ quantité qui ne dépend que du rapport des rayons b & b' des deux baſes; en

effet faiſant $\frac{b'}{b} = r$, la quantité précédente deviendra $\frac{9\,K\,r^2}{a^4\,(1+r+r^2)^2} = \frac{9\,K}{a^4\,(1+r+\frac{1}{r})^2}$.

Cette quantité ſera donc la plus grande lorſque la valeur de $1+r+\frac{1}{r}$ ſera la plus petite, ce qui aura lieu, en faiſant $dr - \frac{dr}{r^2} = o$, ou bien $1 - \frac{1}{r^2} = o$ ſavoir $r = 1$, & par conſéquent $b = b'$. D' où l' on doit conclure que la force d' une colonne de figure conique, relativement à ſa ſolidité, ſera toujours la plus grande lorſque les deux baſes ſeront égales, c' eſt-à-dire lorſque la colonne ſera cylindrique. Ainſi pour cette conſidération les colonnes cylindriques doivent être préférables aux coniques.

19 Nommons en général s la ſolidité de la colonne, qui eſt égale à l' intégrale de $\pi\,\zeta^2\,dx$ priſe de manière qu' elle ſoit nulle lorſque $x = o$, & complette lorſque $x = a$, & le rapport de P à S^2, c' eſt-à-dire la valeur de $\frac{P}{S^2}$ pourra être regardée comme exprimant la force relative d' une colonne; cette force ſera donc, pour les colonnes coniques, où les diamêtres des baſes ſont entr' elles comme r à 1, $= \frac{9\,K}{a^4\,(1+r+\frac{1}{r})^2}$, & pour les colonnes cylindriques $= \frac{K}{a^4}$; ce qui ſert à déterminer la valeur de la conſtante K; c' eſt pourquoi ſi on fait $K = a^4 F$, la conſtante F exprimera la force relative d' une colonne cylindrique de même hauteur.

20 Suppoſons maintenant $\gamma = o$, ce qui donnera $\zeta^2 = \alpha + \beta x$ qui eſt l' équation d' une parabole, l' intégrale de $\frac{dx}{\zeta^2} = \frac{dx}{\alpha+\beta x}$ ſera en général $\frac{1}{\beta}\,l.(\alpha+\beta\lambda)$;

d'où en complétant & faiſant $x = a$ on aura $A = \frac{1}{\beta} l. \left(1 + \frac{\beta a}{\alpha}\right)$; donc $P = \left(\frac{1}{4} + \frac{\pi^2}{l.^2 \left(1 + \frac{\beta a}{\alpha}\right)}\right) \beta^2 K.$

Maintenant pour avoir s on intégrera la formule $\pi z^2 dx = \pi (\alpha + \beta x) dx$, & complétant l'intégrale comme on l'a enſeigné plus haut on aura $s = \pi \left(\alpha + \frac{\beta a}{2}\right) a$; donc

$$\frac{P}{s^2} = \frac{K}{a^2 \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{a}{2}\right)^2} \times \left(\frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{l.^2 \left(1 + \frac{\beta a}{\alpha}\right)}\right).$$

Faiſons $\frac{\beta a}{\alpha} = r$, & mettons $F a^4$ à la place de K, on aura pour la force relative de la colonne parabolique l'expreſſion $\frac{P}{S^2} = \frac{F}{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{r}\right)^2} \times \left(\frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{l.^2 (1+r)}\right)$, F étant celle de la colonne cylindrique de même hauteur.

21 Cherchons le *maximum* de cette expreſſion, & la différentiation donnera cette équation tranſcendente en r $\frac{l.^3 (1+r)}{4\pi^2} + l. (1+r) = \frac{r (2+r)}{2 (1+r)}$; d'où il faudra tirer r. Pour y parvenir je fais $l.(1+r) = t$; & par conſéquent $r = e^t - 1$; j'aurai en ſubſtituant

$$\frac{t^3}{4\pi^2} + t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

Je réduis en ſérie les quantités exponentielles, ce qui me donne $\frac{e^t - e^{-t}}{2} = t + \frac{t^3}{2.3} + \frac{t^5}{2.3.4.5} + \&c.$ de ſorte que l'équation deviendra

$$\left(\frac{1}{2.3} - \frac{1}{4\pi^2}\right) t^3 + \frac{t^5}{2.3.4.5} + \frac{t^7}{2.3..7} + \&c. = 0$$

Cette équation donne d'abord $t = o$, enſuite étant diviſée par t^3 elle devient

$$\frac{1}{2.\ 3} - \frac{1}{4\ \pi^2} + \frac{t^2}{2.\ 3.\ 4.\ 5} + \frac{t^4}{2.\ 3 \ldots 7} + \&c. = o$$

laquelle, à cauſe de $\pi > 3$, aura tous ſes termes poſitifs, enſorte que comme elle ne contient que des puiſſances paires de t, elle ne pourra avoir aucune racine réelle, puiſque t^2 ne ſauroit avoir aucune valeur réelle poſitive. Ainſi $t = o$ ſera la ſeule racine réelle de l'équation dont il s'agit, par conſéquent la valeur cherchée de r ſera auſſi $= o$; ce qui donnera $\frac{\beta a}{\alpha} = o$ & par conſéquent $\beta = o$ c'eſt à-dire la colonne cylindrique. Faiſons donc $r = o$ dans l'expreſſion de $\frac{P}{S}$, ou plutôt r infiniment petit & elle ſe réduira à F; or ſi on donnoit à r une toute autre valeur, comme ſi on faiſoit $r = \infty$, on trouveroit $\frac{P}{S} = \frac{F}{\pi^2}$ valeur moindre que la précédente; ce qui prouve que le cas de $r = o$ eſt celui du *maximum*; d'où il faut conclure que la force eſt toujours plus grande dans les colonnes cylindriques que dans les paraboliques.

22 Conſidérons préſentement l'équation générale $z^2 = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ laquelle repréſente une ſection conique quelconque rapportée à l'un des axes, & faiſant $\beta = 2 b \gamma$, $\alpha = c \gamma$, on pourra la mettre ſous cette forme $z^2 = \gamma ((x + b)^2 + c - b^2)$ laquelle, ſi $c - b^2$ eſt une quantité négative, repréſentera une hyperbole rapportée à ſon grand axe lorſque γ eſt poſitive, & une ellipſe lorſque γ eſt négative; mais ſi $c - b^2$ eſt une quantité poſitive, γ devra être poſitive & l'équation ſera à une hyperbole rapportée à ſon axe conjugé enſorte que la colonne, au lieu d'être renflée, ſe trouvera diminuée au

milieu. C'eſt pourquoi il ſuffira d'examiner le premier cas où $c - b^2 = -r^2$, en ſorte que l'on ait $z^2 = \gamma((x+b)^2 - r^2)$; & nous remarquerons d'abord ici que puiſque la hauteur de la colonne eſt $= a$, il faut, pour que la courbe qui répond à la portion d'axe a ſoit toute réelle, que l'on ait 1°, ſi $\gamma > o$, $b = o$ ou $> r$ (r & ſuppoſée une quantité poſitive) 2° ſi $\gamma < o$, $\pm b < r$, & $a + b < r$; ($\pm b$ dénotant la valeur de b priſe poſitivement).

Cela poſé on aura $\frac{dx}{z^2} = \frac{dx}{2\gamma r(x+b-r)} - \frac{dx}{2\gamma r(x+b+r)}$, dont l'intégrale priſe enſorte qu'elle evanouiſſe lorſque $x = o$ ſera $\frac{1}{2\gamma r}\, l.\left(\frac{x+b-r}{x+b+r} \times \frac{b+r}{b-r}\right)$; donc faiſant $x = a$, on aura $A = \frac{1}{2\gamma r}\, l.\left(\frac{a+b-r}{a+b+r} \times \frac{b+r}{b-r}\right)$; de là à cauſe de $\frac{\beta^2}{4} - \alpha\gamma = \gamma^2(b^2 - c) = \gamma^2 r^2$, l'expreſſion P deviendra (article 17) $P = \gamma^2 r^2 \left\{1 + \frac{4\pi^2}{l.^2\left(\frac{a+b-r}{a+b+r} \times \frac{b+r}{b-r}\right)}\right\} K$.

23 Il ne reſte plus qu'à trouver la valeur de S par l'intégration de la formule $\pi z^2\, dx = \pi\gamma((x+b)^2 - r^2)\, dx$, laquelle donne l'intégrale $\pi\gamma\left(\frac{(x+b)^3 - b^3}{3} - r^2 x\right) = \pi\gamma x\left(\frac{x^2}{3} + xb + b^2 - r^2\right)$; de ſorte qu'en faiſant $x = a$, on aura $S = \pi\gamma a\left(\frac{a^2}{3} + ab + b^2 - r^2\right)$; donc enfin $\frac{P}{S^2} = \frac{\left\{\frac{1}{\pi^2} + \frac{4}{l.^2\left(\frac{a+b-r}{a+b+r} \times \frac{b+r}{b-r}\right)}\right\} \frac{K r^2}{a^2}}{\left(\frac{a^2}{3} + ab + b^2 - r^2\right)^2}$

Faiſons encore $b = pa$, $r = qa$, & mettons F à la place de $\frac{K}{a^4}$ on aura

$$\frac{P}{s^2} = \frac{\left\{\frac{1}{\pi^2}\, l.^2\left(\frac{1+p-q}{1+p+q} \times \frac{p+q}{p-q}\right)^{+\frac{4}{}}\right\} F q^2}{\left(\frac{1}{3} + p + p^2 - q^2\right)^2},$$

expreſſion qui peut ſe ſimpliſier encore en ſuppoſant $p + p^2 - q^2 = t$ ce qui la réduira à celle-ci :

$$\frac{F q^2 \left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{4}{l.^2\left(\frac{t+q}{t-q}\right)}\right)}{\left(\frac{1}{3} + t\right)^2},$$

qui ne contient que deux indéterminées t & q.

24. Puiſque $q = \frac{r}{a}$, il eſt clair que la quantité q devra toujours être poſitive; voyons donc d'abord qu'elle ſera la valeur de q qui rendra l'expreſſion précédente au *maximum*. Pour cela il ſuffit de rendre un *maximum* la quantité $q^2 \left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{4}{l.^2\left(\frac{t+q}{t-q}\right)}\right)$; dont la différentielle logarithmique étant égale à zéro donnera l'équation

$$\frac{1}{q} - \frac{8t}{(t-q)^2} \times \frac{1}{\frac{1}{\pi^2}\, l.^3\left(\frac{t+q}{t-q}\right) + 4\, l.\left(\frac{t+q}{t-q}\right)} = 0$$

d'où il faudra tirer le valeur de q.

Faiſons pour cela $l.\left(\frac{t+q}{t-q}\right) = \tau$ donc $\frac{t+q}{t-q} = e^\tau$, & $q = \frac{e^\tau - 1}{e^\tau + 1}\, t$, l'équation précédente deviendra

$\frac{z^3}{\pi^2} + 4z = \frac{8qt}{(t-q)^2} = 2\left(e^{2z} - 1\right)$; donc réduisant l' exponentielle e^{2z} en série on aura l' équation

$$z^2 + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2\pi^2}\right) z^3 + \frac{16}{2.3.4} z^4 + \text{&c.} = 0$$

laquelle donne d' abord $z = o$, & à cause que tous ses termes sont positifs ne sauroit avoir aucune racine réelle plus grande que zéro. Mais nous allons prouver que cette équation ne peut avoir non plus de racine réelle négative. Pour cela je reprends la forme $\frac{z^3}{2\pi^2} + 2z = e^{2z} - 1$; & je fais $z = -\frac{u}{2}$, j' aurai celle-ci: $\frac{u^3}{16\pi^2} = 1 - u - \frac{1}{e^u}$. Il est visible qu' en faisant $u = o$, les deux membres de cette équation deviennent nuls à la fois, & par conséquent égaux entr' eux ; mais à mésure que u augmente, le premier membre augmente aussi, & le second diminue; donc il sera impossible que l' équation puisse jamais avoir lieu tant que u sera $> o$; pour prouver que le second membre diminue à mésure que u augmente il n' y a qu'à prendre sa différentielle, laquelle est $-\left(1 - \frac{1}{e^u}\right) du$; or comme e est > 1 il est visible que e^u sera toujours aussi > 1 tant que $u > o$ dont $1 - \frac{1}{e^u}$ sera toujours un nombre positif, par conséquent la différentielle dont il s' agit sera toujours négative ; donc &c.

25. Nous venons donc de démontrer qu' il n' y a qu'une seule valeur réelle de z ou de $l. \frac{t+q}{t-q}$ qui puisse rendre la formule proposée un *maximum* ou un *minimum* ; cette valeur est $l. \frac{t+q}{t-q} = o$, d' où l' on tire $\frac{t+q}{t-q} = 1$,

& de

& de la $q = o$. Qu'on faſſe donc dans l'expreſſion de $\frac{P}{s^2}$, $q = o$, ou ſeulement infiniment petit, elle deviendra, à cauſe de $l.\left(\frac{t+q}{t-q}\right) = \frac{l\,1 + \frac{q}{t}}{1 - \frac{q}{t}} = \frac{2q}{t}$ à très-peu près, $\frac{P}{s^2} = \frac{F\,t^2}{\left(\frac{1}{3} + t\right)^2}$; pour voir maintenant ſi cette valeur eſt un *maximum* ou un *minimum*, qu'on faſſe par exemple $q = t$ on aura $l\frac{t+q}{t-q} = l\,\infty = \infty$; de ſorte que l'expreſſion de $\frac{P}{s^2}$ ſe réduira à celle-ci $\frac{F\,t^2}{\pi^2\left(\frac{1}{3} + t\right)^2}$, qui eſt évidemment plus petite que la précédente, à cauſe de $\pi > 1$.

Quant aux valeurs imaginaires de z, c'eſt-à-dire de $l.\frac{t+q}{t-q}$, il eſt clair qu'elles doivent être rejetées, parcequ'elles rendroient toute la valeur de $\frac{P}{s^2}$ imaginaire, il n'y a que le ſeul cas où z ſeroit de la forme $\mu\sqrt{-1}$, dans lequel $\frac{P}{s^2}$ auroit néanmoins une valeur réelle; or ce cas aura lieu quand $\frac{t+q}{t-q} = -1$, c'eſt-à-dire lorſque $q = \infty$: car alors on aura $l.\frac{t+q}{t-q} = l - 1 = \pi\sqrt{-1}$ & l'expreſſion de $\frac{P}{s^2}$ deviendra $\frac{F\,q^2\left(\frac{1}{\pi^2} - \frac{4}{\pi^2}\right)}{-\left(\frac{1}{3} + t\right)^2}$ laquelle eſt, à la vérité, toute réelle; mais comme elle eſt en même tems négative, ce qui eſt abſurde, on voit que le cas dont il s'agit doit être également rejeté.

26. Le *maximum* de la quantité $\frac{P}{S^2}$ aura donc lieu uniquement lorſque $q = o$, ce qui donne $r = o$, & par conſéquent $z^2 = \gamma (x + b)^2$ pour l'équation de la courbe, ce qui rentre dans le cas de l'art. 18, où la colonne étoit ſuppoſée conique; d'où il s'enſuit que la figure conique dans les colonnes eſt préférable à la figure renflée qui proviendroit de la revolution d'une ſection conique autour de ſon axe. Mais ſi on veut que la colonne ait la plus grande force poſſible, il faudra lui donner la figure cylindrique, comme nous l'avons démontré plus haut (art. cité).

27. Je n'examinerai pas ici quelle eſt la force des colonnes qui ſont formées par d'autres courbes que des ſections coniques; parceque d'un côté l'équation en u de l'art. 13 eſt rarement intégrable, & que de l'autre la conſidération de pluſieurs cas particuliers ne pourroit jamais conduire à une concluſion vraiment générale. Je vais tacher plutôt de reſoudre la queſtion propoſée d'une manière directe & générale, en cherchant immédiatement la courbe qui, par ſa rotation autour de ſon axe, produira une colonne qui ait la plus grande force poſſible; problême d'un genre aſſès neuf, & dont la ſolution demande des artifices particuliers qui pourront même être utiles dans d'autres occaſions.

28. Voici en quoi conſiſte ce problême exprimé analytiquement: *il s'agit de trouver une équation entre les ordonnées* z *& les abſciſſes* x, *telle que la quantité* $\frac{P}{S^2}$ *ſoit la plus grande qu'il eſt poſſible*, s *étant égale à l'intégrale* $\pi \int z^2 dx$ *priſe depuis* $x = o$, *juſqu'à* $x = o$, *& P étant une conſtante qui doit être déterminée par cette condition, que l'intégrale* $\int \frac{dx}{u}$ *priſe enſorte qu'elle ſoit nulle lorſque*

$x = o$, *devienne* $= \pi$ *lorſque* $x = a$, *en ſuppoſant* u *donnée par l'équation différentielle*

$4 P u^2 + X \left(\frac{2 u d^2 u - d u^2}{d x^2} - 4 \right) = o$ *où* X *eſt une fonction donnée de* ζ *que nous avons ſuppoſée plus haut* $= K \zeta^4$.

On voit que ce qui rend ſurtout le problême difficile, c'eſt que la quantité u n'eſt pas donnée en P, & en ζ, en termes finis ; mais ſuppoſons pour un moment que ce ſoit une fonction connue de ζ, & de P, enſorte que $d u = M d \zeta + N d P$, en faiſant auſſi P variable, dans ce cas voici comment on pourra s'y prendre.

Puiſque $\frac{P}{S^2}$ doit être un *maximum* on aura d'abord en différentiant & employant la caractériſtique δ, $\frac{\delta P}{P} + \frac{2 \delta S}{S} = o$; Or puiſque $\int \frac{dx}{u} =$ à une quantité donnée π laquelle eſt indépendante de P, on aura auſſi en différentiant $- \int \frac{dx \, \delta u}{u^2} = o$, & mettant pour δu ſa valeur $M \delta \zeta + N \delta P$, $\int \frac{M \delta \zeta \, dx}{u^2} + \int \frac{N \delta P \, dx}{u^2} = o$; mais P étant une conſtante par rapport à x, on pourra mettre ſa différentielle δP hors du ſigne d'intégration, ce qui donnera l'équation $\int \frac{M \delta \zeta \, dx}{u^2} + \delta P \int \frac{N dx}{u^2} = o$ d'où l'on tire $\delta P = - \frac{\int \frac{M \delta \zeta \, dx}{u^2}}{\int \frac{N dx}{u^2}}$ ces intégrales étant priſes depuis $x = o$, juſqu'à $x = a$.

Quant à la valeur de δs, puiſque $s = \pi \int \zeta^2 dx$; on aura $\delta s = 2\pi \int \zeta \delta \zeta dx$; donc ſubſtituant ces valeurs de δP, & de δs dans l'équation ci-deſſus, on aura celle-ci : $\pi \int \frac{\zeta \delta \zeta dx}{S} - \frac{\int \frac{M \delta \zeta dx}{u^2}}{\int \frac{N dx}{u^2}} = o$

Dénotons par R la quantité $\int \frac{N dx}{u^2}$ qui peut être regardée comme une conſtante, & nous aurons l'équation $\int \left(\frac{\pi \zeta}{S} - \frac{M}{u^2 R} \right) \delta \zeta dx = o$, laquelle donne $\frac{\pi \zeta}{S} - \frac{M}{u^2 R} = o$. Or comme u eſt ſuppoſée une fonction de ζ & de conſtantes, que M eſt par conſéquent auſſi une fonction de ζ & de conſtantes, & que S & R ſont auſſi des conſtantes, il s'enſuit que cette équation donnera $\zeta =$ à une conſtante ; mais il faut que cette valeur de ζ ſatisfaſſe auſſi à l'équation en u ; or comme u eſt (hyp.) une fonction de ζ & P on aura auſſi $u =$ à une conſtante ; donc l'équation dont nous parlons deviendra $4 P u^2 - 4 X = o$, ou $4 P u^2 - X = o$; laquelle pourra toujours ſe verifier lorſque X ſera une fonction de ζ, comme nous l'avons ſuppoſé.

Au reſte comme cette ſolution eſt fondée ſur l'hypothèſe particulière de u égal à une fonction de ζ, il s'en faut beaucoup qu'on puiſſe la regarder comme exacte & complette ; auſſi n'eſt elle ici que comme une introduction à la ſolution générale que nous allons donner dans les articles ſuivans.

29. Nous aurons d'abord comme ci-deſſus les deux équations $\frac{\delta P}{P} - \frac{2 \delta s}{S} = o$, $\int \frac{dx \delta u}{u^3} = o$, & de

plus nous aurons auſſi l'équation $\delta s = 2\pi \int z \, \delta z \, dx$; & il ne reſtera plus qu'à trouver une équation entre δP, δu, & δz. Pour cela je reprends l'équation en u, & pour la rendre plus traitable, je la ramene à ſa premiere forme, en faiſant $u = t^2$, ce qui la réduit à celle-ci $Pt + X\left(\frac{d^2 t}{dx^2} - \frac{1}{t^3}\right) = o$ laquelle eſt moins chargée de différentielles que celle en u; maintenant je la différentie en affectant les différentielles de la caracteriſtique δ & faiſant varier à la fois t, P & z, j'aurai $P\delta t + t\delta P + \left(\frac{d^2 t}{dx^2} - \frac{1}{t^3}\right)\delta X + X\left(\frac{\delta d^2 t}{dx^2} + \frac{3\delta t}{t^4}\right) = o$ mais puiſque X eſt ſuppoſée une fonction de z on aura $dX = X' dz$, & par conſéquent auſſi $\delta X = X' \delta z$; de plus on a par les principes de la méthode *des variations*, expoſée dans les tomes II, & IV, $\delta d^2 t = d^2 \delta t$; donc ſubſtituant ces valeurs & mettant de plus $\frac{-Pt}{X}$ à la place de $\frac{d^2 t}{dx^2} - \frac{1}{t^3}$, on aura cette équation

$$P\delta t + t\delta P - \frac{Pt X' \delta z}{X} + X\left(\frac{d^2 \delta t}{dx^2} - \frac{3\delta t}{t^4}\right) = o$$

c'eſt à dire

$$\left(P - \frac{3X}{t^4}\right)\delta t + X\frac{d^2 \delta t}{dx^2} + t\,\delta P - \frac{PX' t \delta z}{X} = o$$

Je multiplie maintenant cette équation par $\alpha\, dx$, α étant une nouvelle indéterminée, & je l'intégre en faiſant diſparoître, par des intégrations partielles, les différences de δt, j'aurai

$$\int\left(\left(P - \frac{3X}{t^4}\right)\alpha + \frac{d^2 (X\alpha)}{dx^2}\right)\delta t\, dx$$
$$+ \frac{X\alpha\, d\delta t}{dx} - \frac{d.(X\alpha)\,\delta t}{dx}$$
$$+ \delta P \int t\alpha\, dx - P\int \frac{t\alpha X' \delta z}{X}\, dx = \text{à une conſtante.}$$

Je ſuppoſe ce qui eſt permis que la quantité α ſoit telle que l'on ait

$\left(P - \frac{3X}{t^4}\right)\alpha + \frac{d.^2(X\alpha)}{dx^2} = \frac{H}{t^3}$, ($H$ étant une conſtante quelconque) & l'équation précédente deviendra

$h\int\frac{\delta t\,dx}{t^3} + \frac{X\alpha\,d.\delta t}{dx} - \frac{d.(X\alpha)\,\delta t}{dx} + \delta P\int t\alpha\,dx - P\int\frac{t\alpha X'\delta\zeta}{X}dx =$ à une conſt., où je remarque qu'à cauſe de $t^2 = u$, on aura $\int\frac{\delta t\,dx}{t^3} = \int\frac{\delta u\,dx}{u^2}$; Donc ſi on étend l'intégration de l'équation précédente depuis $x = o$, juſqu'à $x = a$, on aura la valeur de l'intégrale $\int\frac{\delta u\,dx}{u^2}$ laquelle devra être nulle par les conditions du problême.

Pour cela je nomme B la valeur totale de l'intégrale $\int t\alpha\,dx$ priſe depuis $x = o$ juſqu'à $x = a$, enſuite je nomme Π & Ψ les valeurs des termes $\frac{X\alpha\,d\,\delta t}{dx} - \frac{d.(X\alpha)}{dx}\delta t$ pour le point où $x = o$, & pour celui où $x = a$; j'aurai donc à cauſe de $\int\frac{\delta t\,dx}{t^3} = \int\frac{\delta u\,dx}{u^2} = o$, l'équation $\Pi - \Psi + B\,\delta P - P\int\frac{t\alpha X'\delta\zeta}{X}dx = o$ d'où l'on tire d'abord

$$\frac{\delta P}{P} = \frac{\Psi - \Pi}{B\,P} + \frac{1}{B}\int\frac{t\alpha X'\delta\zeta}{X}dx$$

l'intégrale $\int\frac{t\alpha X'\delta\zeta\,dx}{X}$ étant auſſi ſuppoſée priſe depuis $x = o$ juſqu'à $x = a$.

Donc ſi on ſubſtitue cette valeur de δP, ainſi que celle de δS dans l'équation $\frac{\delta P}{P} - \frac{2\,\delta S}{S} = o$

on aura celle-ci

$$\frac{\Psi - \Pi}{B\,B} + \frac{1}{B}\int \frac{t\,\alpha\,X'\,\delta\zeta\,dx}{X} - \frac{4\,\pi}{S}\int \zeta\,\delta\zeta\,dx = o$$

ou bien, à cauſe que les quantités B & S ſont conſtantes par rapport à x, puiſqu' elles expriment des intégrales déterminées où x eſt ſuppoſée $= a$,

$$\frac{\Psi - \Pi}{B\,P} + \int \left(\frac{t\,\alpha\,X'}{B\,X} - \frac{4\,\pi\,\zeta}{S}\right)\delta\zeta\,d\dot{x} = o$$

On aura donc d'abord pour tous les points de la courbe l'équation indéfinie $\frac{t\,\alpha\,X'}{B\,X} - \frac{4\,\pi\,\zeta}{S} = o$

c' eſt-à dire $\frac{t\,\alpha\,X'}{z^2\,X} = \frac{4\,\pi\,B}{S}$;

enſuite on aura l'équation déterminée $N = M$ laquelle ne ſe rapporte qu' aux points extrêmes de la courbe où $x = o$ & $x = a$.

30. Ainſi pour avoir l'équation de la courbe cherchée il n' y aura qu' à éliminer les deux indéterminées t & α, à l' aide de ces trois équations $\frac{t\,\alpha\,X'}{z\,X} = \frac{4\,\pi\,B}{S}$,

$$\left(P - \frac{3\,X}{t^4}\right)\alpha + \frac{d^2(X\alpha)}{dx^2} = \frac{H}{t^3},$$

$$P\,t + X\left(\frac{d^2t}{dx^2} - \frac{1}{t^3}\right) = o$$

& comme X eſt ſuppoſée une fonction connue de ζ, on aura une équation finale, entre les ordonnées ζ, & les abſciſſes x.

Il eſt bon de remarquer que ſi on fait $\alpha = H\,r$, la conſtante H diſparoîtra de la ſeconde équation, & que la première étant diviſée par H deviendra $\frac{r\,t\,X'}{z^2\,X} = \frac{4\,\pi\,B}{H\,S}$, de ſorte que, comme H eſt une conſtante arbitraire, la quantité $\frac{4\,\pi\,B}{H\,S}$ aura une valeur conſtante quelconque indépendante de B, & de S.

De cette manière on aura donc, en prenant une conſtante arbitraire C, les trois équations ſuivantes

$$\frac{r t X'}{\zeta X} = C,$$

$$\left(P - \frac{3X}{t^4}\right) r + \frac{d.^2(Xr)}{dx^2} - \frac{1}{t^3} = o,$$

$$P t + X\left(\frac{d^2 t}{dx^2} - \frac{1}{t^3}\right) = o,$$ qui renferment la ſolution du problême propoſé, pris dans toute ſa généralité.

31. Si on chaſſe r & t, il viendra une équation en ζ & x du quatrième ordre, qui ſera peut-être bien difficile à intégrer; mais je remarque que $\zeta =$ à une conſtante ſera ſurément une intégrale particulière de cette équation; car ſuppoſant ζ conſtante, X & X' qui ſont des fonctions de ζ, ſeront auſſi conſtantes, de ſorte que ſi on ſuppoſe auſſi r & t conſtantes en même tems, les équations ci-deſſus deviendront

$$\frac{r t X'}{\zeta X} = C,\ \left(P - \frac{3X}{t^4}\right) r - \frac{1}{t^3} = o,\ P t - \frac{X}{t^3} = o;$$

dont les deux dernières donneront d'abord

$t^4 = \sqrt[4]{\frac{X}{P}}$, $r = \frac{t}{P t^4 - 3X} = \frac{1}{2\sqrt[4]{P}\, X^3}$; enſuite la première donnera $-\frac{X'}{2\zeta X\sqrt{P X}} = C$; d'où l'on tirera la valeur de ζ laquelle, à cauſe de la conſtante arbitraire C, pourra être une conſtante quelconque.

32. Cette valeur de ζ donne évidemment un cylindre pour la figure de la colonne; mais, comme ce n'eſt qu'une valeur particulière, elle ne peut être cenſée reſoudre le problême que dans certaines circonſtances. En effet, comme l'équation en ζ doit être du quatrième ordre, ainſi que nous l'avons remarqué ci-deſſus, elle renfermera néceſſairement, étant intégrée, quatre conſtantes arbitraires, enſorte qu'on pourra faire paſſer la courbe par quatre

points

points quelconques donnés, ou par deux points, & par deux tengentes, ou &c.: Si on veut que la courbe de la colonne qui doit avoir la plus grande force poſſible paſſe par quatre points également éloignés de l'axe; dans ce cas on ſera aſſuré qu'il n'y aura qu'une ligne droite qui reſolve le problême, enſorte que la colonne devra être néceſſairement cylindrique; la même choſe aura lieu, par exemple, ſi les deux baſes de la colonne doivent être égales entr'elles, & que de plus les tengentes de la courbe aux deux extrémités doivent être paralleles à l'axe; & ainſi du reſte.

En général, toutes les fois que les quatre conditions données ſeront telles, qu'elles pourront quadrer avec une ligne droite parallele à l'axe, cette ligne ſera ſurément celle du *maximum*; mais dans tous les autres cas le proplême ne pourra ſe reſoudre que par l'intégration complette de l'équation différentielle en z & x.

33. Si on veut que la colonne ſoit à peu-près cylindrique, ce qui eſt le cas le plus ordinaire, on pourra reſoudre le problême d'une manière approchée que voici.

Puiſque lorſque z eſt conſtante on a auſſi r, & t conſtantes, il eſt viſible que ſi z varie peu, r, & t varieront peu auſſi.

Suppoſons donc

$z = Z(1+\zeta)$, $r = R(1+\rho)$, $t = T(1+\theta)$,

Z, R, T étant des conſtantes finies, & ζ, ρ, θ des variables très petites; & ſubſtituant ces valeurs on pourra negliger les produits de deux, ou de pluſieurs dimenſions de ζ, ρ, θ, enſorte que l'on aura des équations où les variables ne ſe trouveront que ſous une forme linéaire, & qui ſeront par conſéquent intégrables par les méthodes connues.

Mais avant de faire ces ſubſtitutions on remarquera, que comme X eſt ſuppoſée une fonction donnée de z,

ſi on fait $\frac{dX}{dz} = X'$, & $\frac{dX'}{dz} = X''$, les quantités X & X' deviendront à très-peu près $X + X'Z\zeta$, $X' + X''Z\zeta$, c' eſt-à-dire $X\left(1 + \frac{X'Z\zeta}{X}\right)$ $X'\left(1 + \frac{X''Z\zeta}{X'}\right)$ en ſuppoſant que l' on ait mis Z à la place de z dans X, X', X'', enſorte que ces quantités ſeront maintenant conſtantes.

De cette manière les équations de l' art. 30 deviendront

$$\frac{RTX'}{ZX}\left(1 + \rho + \theta + \zeta\left(\frac{X''Z}{X'} - \frac{X'Z}{X} - 1\right)\right) = C,$$

$$R\left(P - \frac{3X}{T^4}(1 + \frac{X'Z}{X}\zeta - 4\theta) + P\rho\right) + XR\left(\frac{X'Z}{X}\frac{d^2\zeta}{dx^2} + \frac{d^2\rho}{dx^2}\right) - \frac{1}{T^3}\left(1 - 3\theta\right) = o,$$

$$PT(1 + \theta) + XT\frac{d^2\theta}{dx^2} - \frac{X}{T^3}\left(1 + \frac{X'Z}{Z}\zeta - 3\theta\right) = o.$$

Or ſi les quantités ρ, θ & ζ étoient nulles on auroit

$$\frac{RTX'}{ZX} = C,\ R\left(P - \frac{3X}{T^4}\right) - \frac{1}{T^3} = o,\ PT - \frac{X}{T^3} = o;$$

d' où l' on tire $X = PT^4$, $R = -\frac{1}{2PT^3}$; donc ſuppoſant (ce qui eſt permis) que ces équations aient lieu, les équations précédentes deviendront

$$\rho + \theta + \left(\frac{ZX''}{X'} - \frac{ZX'}{X} - 1\right)\zeta = o,$$

$$-3\left(\frac{ZX'}{X}\zeta - 4\theta\right) + \rho + T^4\left(\frac{ZX'}{X}\frac{d^2\zeta}{dx^2} + \frac{d^2\rho}{dx^2}\right) - \sigma\theta = o,$$

$$\theta + T^4\frac{d^2\theta}{dx^2} - \frac{ZX'}{X}\zeta + 3\theta = o,$$

ou bien, en faiſant pour plus de ſimplicité $\frac{ZX'}{X} = M$, $1 + \frac{ZX'}{X} - \frac{ZX''}{X'} = N$, on aura ces trois équations-ci :

$$\rho + \theta - N\zeta = o$$

$$M\left(T^4\frac{d^2\zeta}{dx^2} - 3\zeta\right) + T^4\frac{d^2\rho}{dx^2} + \rho + \sigma\theta = o,$$

$$T^4\frac{d^2\theta}{dx^2} + 4\theta - M\zeta = o.$$

de l'intégration desquelles dépend maintenant la solution du problême.

34. Pour intégrer ces équations je suppose

$$\zeta = \alpha \, sin. \left(\varepsilon + x\frac{\sqrt{\omega}}{T^2}\right)$$

$$\theta = \beta \, sin. \left(\varepsilon + x\frac{\sqrt{\omega}}{T^2}\right)$$

$$\rho = \gamma \, sin. \left(\varepsilon + x\frac{\sqrt{\omega}}{T^2}\right)$$

α, β, γ, ε & ω étant des constantes indéterminées; je substitue ces valeurs, & je divise ensuite tous les termes par $sin. \left(\varepsilon + x\frac{\sqrt{\omega}}{T^2}\right)$; j'ai les trois équations suivantes

$$\gamma + \beta - N\alpha = o,$$

$$-M\alpha(\omega + 3) - \gamma(\omega - 1) + \sigma\beta = o,$$

$$-\beta(\omega - 4) - M\alpha = o;$$

la dernière donne $\alpha = -\frac{\beta(\omega-4)}{M}$, ce qui étant substitué dans les deux premières, on aura

$$\gamma + \beta\left(1 + \frac{N(\omega - 4)}{M}\right) = o$$

$$\beta(\sigma + (\omega + 3)(\omega - 4)) - \gamma(\omega - 1) = o;$$

la première donnera sur le champ

$$\gamma = -\beta\left(1 + \frac{N(\omega - 4)}{M}\right)$$

& substituant ensuite cette valeur dans l'autre équation, on aura après avoir divisé tous les termes par β,

$$\sigma + (\omega + 3)(\omega - 4) + (\omega - 1)\left(1 + \frac{N(\omega-4)}{M}\right) = o$$

c' eſt-à-dire en réduiſant
$(M + N)\,\omega^2 - 5\,N\omega + 4\,N - 7\,M = o$
équation d' où l' on tirera deux valeurs de ω, leſquelles ſeront toujours néceſſairement réelles, à cauſe que
$(5\,N)^2 - 4\,(M+N)\,(4\,N - 7\,M) =$
$9\,N^2 + 12\,MN + 28\,M^2 = (3\,N + 2\,M)^2 + 24\,M^2$;
& ces valeurs ſeront
$$\omega = \frac{5\,N \pm \sqrt{((3\,N + 2\,M)^2 + 24\,M^2)}}{2\,(M+N)}.$$

Comme la quantité β a diſparu de l' équation en ω, il s' enſuit qu' elle reſte indéterminée, de ſorte qu' on pourra la prendre à volonté ; mais on peut, ſi l' on veut, prendre α à volonté au lieu de β, ce qui ſera plus commode, parceque c' eſt proprement la quantité ζ que l' on cherche ; alors les quantités β, & γ devront être déterminées ainſi $\beta = -\frac{M\cdot\alpha}{\omega - 4}$, $\gamma = \left(N + \frac{M}{\omega - 4}\right)\alpha$;

Quant à la conſtante ε, comme elle a auſſi diſparu des équations, elle ſera pareillement arbitraire.

Or puiſque la quantité ω a deux valeurs, ſi on déſigne ces valeurs par ω & $\acute{\omega}$, & qu' on prenne deux autres conſtantes arbitraires $\acute{\alpha}$ & $\acute{\varepsilon}$, on aura pour la valeur complette de ζ l' expreſſion
$$\zeta = \alpha\,\mathit{ſin.}\left(\varepsilon + x\,\frac{\sqrt{\omega}}{T^2}\right) + \acute{\alpha}\,\mathit{ſin.}\left(\acute{\varepsilon} + x\,\frac{\sqrt{\omega}}{T^2}\right),$$
& les valeurs correſpondantes de θ & ρ ſeront
$$\theta = \beta\,\mathit{ſin.}\left(\varepsilon + x\,\frac{\sqrt{\omega}}{T^2}\right) + \beta'\,\mathit{ſin.}\left(\acute{\varepsilon} + x\,\frac{\sqrt{\omega}}{T^2}\right),$$
$$\rho = \gamma\,\mathit{ſin.}\left(\varepsilon + x\,\frac{\sqrt{\omega}}{T^2}\right) + \gamma'\,\mathit{ſin.}\left(\acute{\varepsilon} + x\,\frac{\sqrt{\omega}}{T^2}\right);$$
β' & γ' étant les valeurs de β & γ qui réſultent en mettant $\acute{\alpha}$ & $\acute{\omega}$ à la place de α & ω.

35. Je remarque maintenant que lorſque ζ eſt égal à une conſtante, ce qui eſt le cas des colonnes cylindriques,

on a (art. 11.) $P = \frac{\pi^2 K}{a^2}$, a étant la hauteur de la colonne, π étant l'angle de 180.°; ainſi dans notre cas où $z = Z + Z\zeta$, on aura, aux quantités très-petites près, $P = \frac{\pi^2 X}{a^2}$, puiſque X étant conſtante eſt la même quantité qu'on avoit déſignée par K (art. 12.); or on a (art. 33.) $X = PT^4$; donc $X = \frac{\pi^2 XT^4}{a^2}$, d'où $T^4 = \frac{a^2}{\pi^2}$, & par conſéquent $T^2 = \frac{a}{\pi}$; donc ſi on ſubſtitue cette valeur on aura

$$\zeta = \alpha \, \text{ſin.} \left(\varepsilon + \frac{x\pi\sqrt{\omega}}{a}\right) + \acute{\alpha} \, \text{ſin.} \left(\acute{\varepsilon} + \frac{x\pi\sqrt{\acute{\omega}}}{a}\right);$$

α, $\acute{\alpha}$, ε, $\acute{\varepsilon}$ étant quatre conſtantes arbitraires qu'on pourra déterminer, enſorte que la courbe cherchée, dont les abſciſſes ſont x & les ordonnées ſont $z = Z(1 + \zeta)$ paſſe par quatre points donnés, ou par deux points & deux tangentes, ou &c. comme on l'a dit plus haut (art. 32.)

A l'égard des valeurs de ω & $\acute{\omega}$ elles ne dépendront que de la nature de la fonction X de Z; car en faiſant $\frac{Z\,dX}{X\,dZ} = M$, $\frac{Z\,d^2X}{dX\,dZ} = M'$, on aura

$$\omega = \frac{5(1 + M - M') + \sqrt{((3 + 5M - 3M')^2 + 24M^2)}}{2(1 + 2M - M')},$$

$$\acute{\omega} = \frac{5(1 + M - M') - \sqrt{((3 + 5M - 3M')^2 + 24M^2)}}{2(1 + 2M - M')}.$$

S'il arrive que ω ſoit négatif, alors le radical $\sqrt{\omega}$ deviendra imaginaire; & le terme $\alpha \, \text{ſin.} \left(\varepsilon + \frac{x\pi\sqrt{\omega}}{a}\right)$ deviendra (en y mettant $\varepsilon\sqrt{-1}$ à la place de ε & $2\alpha\sqrt{-1}$ à celle de α) de cette forme

$$\alpha \left(e^{\varepsilon + \frac{x\pi\sqrt{-\omega}}{a}} - e^{-\varepsilon - \frac{x\pi\sqrt{-\omega}}{a}} \right)$$

il en ſera de même du terme $\acute{\alpha}\ \mathit{ſin.} \left(\acute{\varepsilon} + \frac{x\pi\sqrt{\acute{\omega}}}{a} \right)$ ſi $\acute{\omega}$ devient négatif.

Si X eſt ſuppoſé proportionel à une puiſſance quelconque de ζ, ou Z, enſorte que $X = K Z^n$, on aura $M = n$, $M = n - 1$; donc

$$\omega = \frac{5 + \sqrt{(9 + \sigma n + 7 n^2)}}{2 + n},$$

$$\acute{\omega} = \frac{5 - \sqrt{(9 + \sigma n + 7 n^2)}}{2 + n};$$

Et ſuppoſant $n = 4$, comme on l'a fait plus haut, on aura $\omega = 2$, $\acute{\omega} = -\frac{1}{3}$; par conſéquent l'équation de la courbe contiendra dans ce cas des ſinus & des exponentielles.

36. Pour ce qui regarde les conſtantes α, $\acute{\alpha}$, ε, $\acute{\varepsilon}$, le moyen le plus ſimple pour les déterminer eſt de ſuppoſer que les valeurs de ζ, & $\frac{d\zeta}{dx}$ ſoient données aux deux extrémités de la colonne où $x = o$, & où $x = a$. Pour cela ſuppoſons donc que lorſque $x = o$ on ait $\zeta = p$, $\frac{d\zeta}{dx} = q$, & que lorſque $x = a$ on ait $\zeta = p'$ $\frac{d\zeta}{dx} = q'$, enſorte que $Z\ (1 + p)$ $Z\ (1 + p')$ ſoient les rayons des deux baſes de la colonne, l'inférieure & la ſupérieure, & que $Z\ q$, $Z\ q'$ ſoient les tangentes de l'inclination du profil de la colonne avec l'axe, à l'extrémité inférieure & à l'extrémité ſupérieure ; on aura (art. préc.)

$$p = \alpha\ \mathit{ſin.}\ \varepsilon + \acute{\alpha}\ \mathit{ſin.}\ \acute{\varepsilon},$$

$$q = \frac{\pi\sqrt{\omega}}{a} (\alpha\ \mathit{cos.}\ \varepsilon + \acute{\alpha}\ \mathit{cos.}\ \acute{\varepsilon}),$$

$$p' = \alpha\ \mathit{ſin.}\ (\varepsilon + \pi\sqrt{\omega}) + \acute{\alpha}\ \mathit{ſin.}\ (\acute{\varepsilon} + \pi\sqrt{\acute{\omega}}),$$

$$q' = \frac{\pi\sqrt{\omega}}{a} (\alpha\ \mathit{cos.}\ (\varepsilon + \pi\sqrt{\omega}) + \acute{\alpha}\ \mathit{cos.}\ (\acute{\varepsilon} + \pi\sqrt{\acute{\omega}}));$$

d'où l'on pourra tirer les valeurs de α, $\acute{\alpha}$, ε, $\acute{\varepsilon}$; en effet les deux premières donneront celles-ci

$$p \cos. \pi \sqrt{\acute{\omega}} + \frac{a\,q}{\pi \sqrt{\acute{\omega}}} \sin. \pi \sqrt{\grave{\omega}} =$$
$$\alpha \sin. (\varepsilon + \pi \sqrt{\acute{\omega}}) + \acute{\alpha} \sin. (\acute{\varepsilon} + \pi \sqrt{\acute{\omega}}),$$
$$- p \sin. \pi \sqrt{\acute{\omega}} + \frac{a\,q}{\pi \sqrt{\acute{\omega}}} \cos. \pi \sqrt{\acute{\omega}} =$$
$$\alpha \cos. (\varepsilon + \pi \sqrt{\acute{\omega}}) + \acute{\alpha} \cos. (\acute{\varepsilon} + \pi \sqrt{\acute{\omega}}),$$

lesquelles étant combinées avec les deux dernières donneront

$$2\,\alpha \cos. \left(\varepsilon + \pi \frac{\sqrt{\omega} + \sqrt{\acute{\omega}}}{2}\right) X \sin. \left(\pi \frac{\sqrt{\omega} - \sqrt{\acute{\omega}}}{2}\right)$$
$$= p' - p \cos. \pi \sqrt{\acute{\omega}} - \frac{a\,q}{\pi \sqrt{\acute{\omega}}} \sin. \pi \sqrt{\acute{\omega}},$$
$$- 2\,\alpha \sin. \left(\varepsilon + \pi \frac{\sqrt{\omega} + \sqrt{\acute{\omega}}}{2}\right) X \sin. \left(\pi \frac{\sqrt{\omega} - \sqrt{\acute{\omega}}}{2}\right)$$
$$= \frac{a\,q'}{\pi \sqrt{\acute{\omega}}} + p \sin. \pi \sqrt{\acute{\omega}} - \frac{a\,q}{\pi \sqrt{\acute{\omega}}} \cos. \pi \sqrt{\acute{\omega}},$$

d'où en faisant, pour abréger,

$$P = p \sin. \pi \sqrt{\acute{\omega}} + \frac{a\,q}{\pi \sqrt{\acute{\omega}}} \cos. \pi \sqrt{\acute{\omega}} + \frac{a\,q'}{\pi \sqrt{\acute{\omega}}};$$
$$Q = p \cos. \pi \sqrt{\acute{\omega}} + \frac{a\,q}{\pi \sqrt{\acute{\omega}}} \sin. \pi \sqrt{\acute{\omega}} - p',$$

on tire

$$\text{tang.} \left(\varepsilon = \pi \frac{\sqrt{\omega} + \sqrt{\acute{\omega}}}{2}\right) = \frac{P}{Q},$$
$$\alpha = \frac{\sqrt{(P^2 + Q^2)}}{2 \sin. \left(\pi \frac{\sqrt{\omega} - \sqrt{\acute{\omega}}}{2}\right)},$$

& de même en faisant

$$P' = p' \sin. \pi \sqrt{\omega} + \frac{a\,q'}{\pi \sqrt{\omega}} \cos. \pi \sqrt{\omega} + \frac{a\,q}{\pi \sqrt{\omega}};$$
$$Q' = p' \cos. \pi \sqrt{\omega} + \frac{a\,q'}{\pi \sqrt{\omega}} \sin. \pi \sqrt{\omega} - p,$$

on aura $tang.\left(\varepsilon + \pi\frac{\sqrt{\omega}+\sqrt{\omega'}}{2}\right) = \frac{P'}{Q'}$,

$$\alpha' = \frac{\sqrt{(P'^2+Q'^2)}}{2\,sin.\left(\pi\frac{\sqrt{\omega}-\sqrt{\omega'}}{2}\right)}.$$

37. Ainſi les conſtantes α, ε, α', ε' auront des valeurs déterminées ſi les quantités p, q, p', q' ſont toutes données, de ſorte qu'il ne reſtera plus rien d'indéterminé dans l'équation de la courbe cherchée; mais ſi quelques unes de ces dernières quantités ne ſont pas données, alors quelques unes des conſtantes α, ε, α', ε' reſteront indéterminées, & ce ſera une nouvelle queſtion de *maximis* & *minimis* de déterminer ces conſtantes, enſorte que la force de la colonne ſoit la plus grande qu'il eſt poſſible. Or l'équation de la courbe étant donnée il eſt clair qu'il n'y aura qu'à chercher l'expreſſion de la force, & la rendre enſuite un *maximum*, en ſuppoſant que les conſtantes indéterminées ſoient variables, ainſi que nous l'avons fait plus haut, lorſque nous avons pris une ſection conique pour la courbe de la colonne; mais la methode que nous avons employé pour reſoudre le problême en général offre un moyen plus ſimple de parvenir au même but.

38. Pour cela il n'y a qu'à ſe rappeller que l'équation, qui renfermoit les conditions du *maximum*, contenoit deux parties, l'une affectée du ſigne $\int$, qui a ſervi à déterminer en général l'équation de la courbe, l'autre hors du ſigne $\int$, qui ne ſe rapportoit qu'aux deux points extrêmes de la courbe, & dont nous n'avons juſqu'à préſent fait aucun uſage.

Cette dernière partie de l'équation dont il s'agit (art. 29.) eſt $\frac{\Psi-\Pi}{B\,P}$, où Π eſt la valeur de la quantité $\frac{X\alpha d\delta t}{dx} - \frac{d.(X\alpha)}{dx}\delta t$ pour le premier point où $x = o$, & Ψ la valeur de la même quantité pour le dernier point où $x = a$; ainſi

comme

comme on a égalé ſéparément à zéro la première partie affectée du ſigne $\int$, il faut pareillement égaler à zéro la partie algébrique $\frac{\Psi - \Pi}{B\,P}$, ce qui donnera l'équation déterminée $\Psi - \Pi = o$. Pour faire uſage de cette équation on remarquera que les variations δt & $\frac{d\,\delta t}{d\,x}$ ou bien $\frac{\delta\,d\,t}{d\,x}$, qu'elle contient, ne regardent que les valeurs extrêmes de t, & $\frac{dt}{dx}$, leſquelles dépendent uniquement des quatre conſtantes arbitraires que l'expreſſion générale de t doit renfermer, & qui ſont les mêmes qui entrent dans l'expreſſion de ζ; d'où il s'enſuit, que pour avoir les valeurs en queſtion de δt & de $\delta \frac{dt}{dx}$ il faudra faire varier ces mêmes conſtantes dans les expreſſions de t & de $\frac{dt}{dx}$, ou ſeulement celles, d'entr'elles, qui ſeront demeurées indéterminées; l'on aura par ce moyen les conditions néceſſaires pour la détermination de toutes les conſtantes indéterminées.

39. Pour appliquer ceci au cas de l'art. 33., on ſubſtituera d'abord dans l'expreſſion $X\alpha\delta\frac{dt}{dx} - \frac{dX\alpha}{dx}\delta t, Hr = HR\,(1 + p)$ à la place de α, $X\,(1 + M\zeta)$ à la place de X, & $T\,(1 + \theta)$ à la place de θ, & négligeant les termes, où les quantités très-petites ζ, p, θ, leſquelles formeroient enſemble deux ou pluſieurs dimenſions, on aura celle-ci : $HXRT\,\delta.\frac{d\theta}{dx}$, où $HXRT$ eſt une quantité conſtante.

Or l'expreſſion générale de θ eſt (art. 34., & 35.), en y ſubſtituant les valeurs de β, β' & T^2, celle-ci :

$$\theta = M \left\{ \frac{\alpha \, sin. \left(\varepsilon + \frac{x \pi \sqrt{\omega}}{a} \right)}{4 - \omega} + \frac{\acute{\alpha} \, sin. \left(sin. \acute{\varepsilon} + \frac{x \pi \sqrt{\acute{\omega}}}{a} \right)}{4 - \acute{\omega}} \right\}$$

d' où l' on tire

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M\pi}{a} \left\{ \frac{\alpha \sqrt{\omega} \, cos. \left(\varepsilon + \frac{x\pi\sqrt{\omega}}{a} \right)}{4 - \omega} + \frac{\acute{\alpha} \sqrt{\acute{\omega}} cos. \left(\acute{\varepsilon} + \frac{x\pi\sqrt{\acute{\omega}}}{a} \right)}{4 - \acute{\omega}} \right\}$$

Donc 1.° faiſant $x = o$, on aura

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M\pi}{a} \left(\frac{\alpha \sqrt{\omega} cos. \varepsilon}{4 - \omega} + \frac{\acute{\alpha} \sqrt{\acute{\omega}} \, cos. \acute{\varepsilon}}{4 - \acute{\omega}} \right),$$

& différentiant par δ en faiſant varier à la fois α, ε, $\acute{\alpha}$, $\acute{\varepsilon}$, on aura pour le premier point de la courbe

$$\delta . \frac{dt}{dx} = \frac{M\pi}{a} \times \frac{\sqrt{\omega}}{4\omega} \left(cos. \, \varepsilon \, \delta \alpha - \alpha \, sin. \, \varepsilon \, \delta \varepsilon \right)$$

$$+ \frac{M\pi}{a} \times \frac{\sqrt{\acute{\omega}}}{4 - \acute{\omega}} \left(cos. \, \acute{\varepsilon} \, \delta \alpha' - \alpha' \, sin. \, \acute{\varepsilon} \, \delta \acute{\varepsilon} \right),$$

cette quantité multipliée par $HXRT$ ſera la valeur de Π.

2.° Faiſant $x = a$, on aura

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M\pi}{a} \left(\frac{\alpha \sqrt{\omega} cos. (\varepsilon + \pi \sqrt{\omega})}{4 - \omega} + \frac{\alpha' \sqrt{\acute{\omega}} \, cos. (\acute{\varepsilon} + \pi \sqrt{\acute{\omega}})}{4 - \acute{\omega}} \right),$$

donc différentiant par δ, en faiſant varier également α, ε, $\acute{\alpha}$, $\acute{\varepsilon}$, on aura pour le dernier point de la courbe

$$\delta . \frac{d\theta}{dx} = \frac{M\pi}{a} \times \frac{\sqrt{\omega}}{4 - \omega} \left(cos. (\varepsilon + \pi \sqrt{\omega}) \, \delta \alpha - \alpha \, sin. (\varepsilon + \pi \sqrt{\omega}) \, \delta \varepsilon \right)$$

$$+ \frac{M\pi}{a} \times \frac{\sqrt{\acute{\omega}}}{4 - \acute{\omega}} \left(cos. (\acute{\varepsilon} + \pi \sqrt{\acute{\omega}}) \, \delta \acute{\alpha} - \acute{\alpha} \, sin. (\acute{\varepsilon} + \pi \sqrt{\acute{\omega}}) \, \delta \acute{\varepsilon} \right),$$

& cette quantité multipliée de même par $HXRT$ ſera la valeur de Ψ.

40. Ainſi l' équation $\Psi - \Pi = o$ donnera en ordonnant les termes

$$\frac{\sqrt{\omega}}{4 - \omega} \left(cos. (\varepsilon + \pi \sqrt{\omega}) - cos. \varepsilon \right) \delta \alpha$$

$$- \frac{\sqrt{\omega}}{4 - \omega} \left(sin. (\varepsilon + \pi \sqrt{\omega}) - sin. \varepsilon \right) \alpha \, \delta \varepsilon$$

$$+ \frac{\sqrt{\omega'}}{4\omega'} (cos.(\varepsilon' + \pi\sqrt{\omega'}) - cos.\varepsilon')\,\delta\alpha'$$

$$- \frac{\sqrt{\omega'}}{4\omega'} (sin.(\varepsilon' + \pi\sqrt{\omega'}) - sin.\varepsilon')\,\alpha'\delta\varepsilon' = 0.$$

d' où l' on déduira les conclusions suivantes.

1.° Si les valeurs des quatre constantes α, α', ε, ε' sont données comme dans le cas de l' art. 36., ou, en général, lorsque la courbe doit satisfaire à quatre conditions données, les différences $\delta\alpha$, $\delta\alpha'$, $\delta\varepsilon$, $\delta\varepsilon'$ seront nulles d' elles mêmes, & l' équation, dont il s' agit, se trouvera identique.

2.° S' il n' y avoit que les quantités α, & α' de données, alors $\delta\alpha$, & $\delta\alpha'$ seroient nulles, & il faudroit faire évanouir séparement les termes affectés des différences indéterminées $\delta\varepsilon$, $\delta\varepsilon'$, ce qui donneroit ces deux équations

$$sin.(\varepsilon + \pi\sqrt{\omega}) - sin.\varepsilon = 0$$
$$sin.(\varepsilon' + \pi\sqrt{\omega'})\ sin.\varepsilon' = 0,$$

lesquelles serviroient à déterminer les angles ε, & ε'; on auroit donc dans ce cas

$$tang.\ \varepsilon = \frac{sin.\ \pi\sqrt{\omega}}{1 - cos.\,\pi\sqrt{\omega}} = cot.\frac{\pi\sqrt{\omega}}{2},$$

$$tang.\ \varepsilon' = \frac{sin.\ \pi\sqrt{\omega'}}{1 - cos.\,\pi\sqrt{\omega'}} = cot.\frac{\pi\sqrt{\omega'}}{2},$$

d' où $\varepsilon = 90.° - \frac{\pi\sqrt{\omega}}{2}$, $\varepsilon' = 90 - \frac{\pi\sqrt{\omega}}{2}$.

Si c' étoient les quantités ε & ε' qui fussent données, alors les termes affectés de $\delta\varepsilon$, & $\delta\varepsilon'$ évanouiroient, & il faudroit ensuite faire disparoître ceux qui sont affectés de $\delta\alpha$, & $\delta\alpha'$; mais comme ces termes ne renferment point les quantités indeterminées α, α', mais seulement les données ε, ε', il s' enfuit qu' il est impossible de les faire évanouir en général, ce qui est une marque qu' il

n' y a point de *maximum* par rapport aux conſtantes α, $\acute{\alpha}$ en particulier.

3.° S' il n' y avoit de donné que les deux baſes de la colonne, alors les valeurs de p, & p' ſeroient données (art. 36.); on prendroit donc les deux équations de cet article

$$p = \alpha \, \textit{ſin.}\, \varepsilon + \alpha' \, \textit{ſin.}\, \acute{\varepsilon},$$
$$p' = \alpha \, \textit{ſin.}\, (\varepsilon + \pi \surd\omega) + \acute{\alpha} \, \textit{ſin.}\, (\acute{\varepsilon} + \pi \surd\acute{\omega}),$$

& les différentiant par δ, en faiſant p, p' conſtantes, & α, $\acute{\alpha}$, ε, $\acute{\varepsilon}$ variables on auroit ces deux-ci :

$$\textit{ſin.}\, \varepsilon \, \delta\alpha + \alpha \, \textit{cos.}\, \varepsilon \, \delta\varepsilon + \textit{ſin.}\, \acute{\varepsilon} \, \delta\acute{\alpha} + \acute{\alpha} \, \textit{cos.}\, \acute{\varepsilon} \, \delta\acute{\varepsilon} = o,$$
$$\textit{ſin.}\, (\varepsilon + \pi\surd\omega) \, \delta\alpha + \alpha \, \textit{cos.}\, (\varepsilon + \pi\surd\omega) \, \delta\varepsilon + \textit{ſin.}\, (\acute{\varepsilon} + \pi\surd\acute{\omega}) \, \delta\acute{\alpha} + \acute{\alpha} \, \textit{cos.}\, (\acute{\varepsilon} + \pi\surd\acute{\omega}) \, \delta\acute{\varepsilon} = o,$$

à l' aide desquelles on pourra déterminer deux des quatre différentielles indéterminées $\delta\alpha$, $\delta\acute{\alpha}$, $\delta\varepsilon$, $\delta\acute{\varepsilon}$ par les deux autres. Cherchons $\delta\alpha$, & $\delta\varepsilon$; pour cela on retranchera les équations précédentes l' une de l' autre après avoir multiplié 1.° la première par $\textit{cos.}\, (\acute{\varepsilon} + \pi\surd\omega)$, & la ſeconde par $\textit{cos.}\, \varepsilon$, 2.° la première par $\textit{ſin.}\, (\varepsilon + \pi\surd\omega)$ & la ſeconde par $\textit{ſin.}\, \varepsilon$; on aura

$$\delta\alpha = \frac{\textit{ſin.}\, \acute{\varepsilon} \times \textit{cos.}\, (\varepsilon + \pi\surd\omega) - \textit{ſin.}\, (\acute{\varepsilon} + \pi\surd\acute{\omega}) \times \textit{cos.}\, \varepsilon}{\textit{ſin.}\, \pi\surd\omega} \, \delta\acute{\alpha}$$
$$+ \frac{\textit{cos.}\, \acute{\varepsilon} \times \textit{cos.}\, (\varepsilon + \pi\surd\omega) - \textit{cos.}\, (\acute{\varepsilon} + \pi\surd\omega) \times \textit{cos.}\, \varepsilon}{\textit{ſin.}\, \pi\surd\omega} \acute{\alpha} \, \delta\acute{\varepsilon},$$

$$\alpha\,\delta\varepsilon = -\frac{\textit{ſin.}\, \acute{\varepsilon} \times \textit{ſin.}\, (\varepsilon + \pi\surd\omega) - \textit{ſin.}\, (\varepsilon' + \pi\surd\acute{\omega}) \, \textit{ſin.}\, \varepsilon}{\textit{ſin.}\, \pi\surd\omega} \, \delta\alpha$$
$$- \frac{\textit{cos.}\, \acute{\varepsilon} \times \textit{ſin.}\, (\varepsilon + \pi\surd\omega) - \textit{cos.}\, (\acute{\varepsilon} + \pi\surd\acute{\omega}) \, \textit{ſin.}\, \varepsilon}{\textit{ſin.}\, \pi\surd\omega} \acute{\alpha} \, \delta\acute{\varepsilon};$$

On ſubſtituera donc ces valeurs dans l' équation générale, & on fera enſuite égaux à zéro, ſéparement, les deux membres affectées de $\delta\acute{\alpha}$, & $\delta\acute{\varepsilon}$; ce qui donnera ces deux équations.

$$\frac{\sqrt{\omega'}}{4-\omega'}\left(cos.\left(\varepsilon'+\pi\sqrt{\omega'}\right)-cos.\,\varepsilon'\right)+$$
$$\frac{\sqrt{\omega}}{4-\omega}\,tang.\,\frac{\pi\sqrt{\omega}}{2}\left(sin.\left(\varepsilon'+\pi\sqrt{\omega'}\right)+sin.\,\varepsilon'\right)=0,$$
$$\frac{\alpha'\sqrt{\omega'}}{4-\omega'}\left(sin.\left(\varepsilon'+\pi\sqrt{\omega'}\right)-sin.\,\varepsilon'\right)+$$
$$\frac{\alpha'\sqrt{\omega}}{4-\omega}\,tang.\,\frac{\pi\sqrt{\omega}}{2}\left(cos.\left(\varepsilon'+\pi\sqrt{\omega'}+cos.\,\varepsilon'\right)=0,\right.$$

qui ſerviront à déterminer les quantités α' & ε'.

En effet, la première ne contenant que la quantité ε', donnera la valeur de cette quantité; enſuite il faudra déterminer α' par la ſeconde équation, laquelle donnera $\alpha'=0$; ainſi la valeur de ζ ſe réduira à celle-ci

$$\zeta=\alpha\,sin.\left(\varepsilon+\frac{x\pi\sqrt{\omega}}{a}\right)$$

où les conſtantes α, & ε, devront ſe déterminer par les deux conditions

$$p=\alpha\,sin.\,\varepsilon,\ p'=\alpha\,sin.\left(\varepsilon+\pi\sqrt{\omega}\right),$$

d' où l' on tire

$$tang.\,\varepsilon=\frac{p\,sin.\,\pi\sqrt{\omega}}{p'-p\,cos.\,\pi\sqrt{\omega}},$$
$$\alpha=\frac{\sqrt{(p'^2-2pp'\,cos.\,\pi\sqrt{\omega}+p^2)}}{sin.\,\pi\sqrt{\omega}},$$

& l' on remarquera que l' on peut prendre indifféremment pour ω l' une quelconque des deux racines de l' équation en ω; de ſorte que la ſolution ſera double.

4.° Enfin, s'il n' y avoit rien de donné, & qu' on cherchât abſolument, entre toutes les courbes poſſibles, celle qui formera une colonne de la plus grande force, relativement à ſa hauteur & à ſa maſſe, comme nous l' avons ſuppoſé dans nos calculs, il faudroit alors dans l' équation ci-deſſus égaler ſéparement à zéro les membres affectés des différentielles indéterminées $\delta\alpha$, $\delta\varepsilon$, $\delta\alpha'$, $\delta\varepsilon'$; ce qui don-

neroit ces quatre équations

$cos.\ (\varepsilon + \pi\sqrt{\omega}) - cos.\ \varepsilon = o$,

$(sin.\ (\varepsilon + \pi\sqrt{\omega}) - sin.\ \varepsilon)\ \alpha = o$,

$cos.\ (\acute{\varepsilon} + \pi\sqrt{\omega}) - cos.\ \acute{\varepsilon} = o$,

$(sin.\ (\acute{\varepsilon} + \pi\sqrt{\omega}) - sin.\ \acute{\varepsilon})\ \acute{\alpha} = o$;

comme la première ne contient que l'angle ε, elle ne pourra ſervir qu'à déterminer cette quantité; enſuite de quoi on ne pourra vérifier la ſeconde qu'en faiſant $\alpha = o$; de même la troiſième donnera la valeur de $\acute{\varepsilon}$, & la quatrième donnera néceſſairement $\acute{\alpha} = o$;

On aura donc dans ce cas $\alpha = o$, & $\acute{\alpha} = o$, & par conſéquent $\zeta = o$, & $\gamma = Z\ (1 + \zeta) = Z$;

c'eſt-à dire γ égale à une conſtante, ce qui donne un cylindre pour la figure de la colonne. D'où l'on doit conclure que la figure cylindrique eſt celle qui donne le *maximum maximorum* de la force.

MEMOIRE

Sur l' utilité de la méthode de prendre le milieu entre les réſultats de pluſieurs obſervations; dans lequel on examine les avantages de cette méthode par le calcul des probabilités; & où l' on réſoud différens problêmes relatifs à cette matière.

PAR M. DE LA GRANGE.

Quand on a pluſieurs obſervations d' un même phénomêne dont les réſultats ne ſont pas tout à fait d' accord, on eſt ſur que ces obſervations ſont toutes, ou au moins en partie, peu exactes, de quelque ſource que l' erreur puiſſe provenir; alors on a coutume de prendre le milieu entre tous les réſultats, parceque de cette manière les différentes erreurs ſe repartiſſant également dans toutes les obſervations, l' erreur qui peut ſe trouver dans le réſultat moyen, devient auſſi moyenne entre toutes les erreurs. Or quoique tout le monde reconnoiſſe l' utilité de cette pratique pour diminuer, autant qu' il eſt poſſible, l' incertitude qui nait de l' imperfection des inſtrumens & des erreurs inévitables des obſervations, j' ai cru, cependant, qu' il ſeroit bon d' examiner & d' apprécier par le calcul les avantages qu' on peut eſperer de retirer d'une ſemblable méthode; c' eſt l' objet que je me ſuis propoſé dans ce mémoire. Je commencerai par ſuppoſer que les erreurs qui peuvent ſe gliſſer dans chaque obſervation ſoient données, & qu' on connoiſſe auſſi le nombre des cas qui peuvent donner ces erreurs, c' eſt-à-dire, la facilité de chaque erreur; je ſuppoſerai enſuite que l' on

connoiſſe ſeulement les limites entre leſquelles toutes les erreurs poſſibles doivent être renfermées avec la loi de leur facilité, & je chercherai dans l'une & dans l'autre de ces hypothèſes, quelle eſt la probabilité que l'erreur du réſultat moyen ſoit nulle, ou égale à une quantité donnée, ou ſeulement compriſe entre des limites données. Je ferai voir, en même tems, comment on peut déterminer, *a poſteriori*, la loi même de la facilité des erreurs, & quelle eſt la probabilité que dans cette détermination on ne ſe trompera pas d'une quantité donnée. D'où je déduirai des règles aſſés ſimples pour la correction des inſtrumens par des vérifications réitérées.

Au reſte, je ſuivrai dans toutes ces recherches la règle ordinaire du calcul des probabilités, ſuivant laquelle on eſtime la probabilité d'un événement par le nombre des cas favorables, diviſé par le nombre de tous les cas poſſibles. La difficulté ne conſiſte que dans l'énumération de ces cas, mais cette énumération demande ſouvent des calculs aſſés compliqués, & dont on ne peut venir à bout que par des artifices particuliers; c'eſt ce qui a lieu ſur tout dans la matière que je vais traiter.

Problême I.

1. On ſuppoſe que dans chaque obſervation on peut ſe tromper d'une unité, tant en plus qu'en moins, mais que le nombre des cas qui peuvent donner un réſultat exact eſt au nombre des cas qui peuvent donner une erreur d'une unité comme $a : 2b$; on demande quelle eſt la probabilité d'avoir un réſultat exact en prenant le milieu entre les réſultats particuliers d'un nombre n d'obſervations.

Puiſque il y a a cas qui donnent zéro d'erreur, & $2b$ cas qui donnent $+1$, & -1, c'eſt-à-dire b cas qui donnent

donnent + 1, & b cas qui donnent − 1 d'erreur, il eſt clair par les règles ordinaires des probabilités que la probabilité que l'erreur ſoit nulle dans chaque obſervation particulière ſera exprimée par $\frac{a}{a+2b}$; voyons donc quelle ſera la probabilité que l'erreur ſoit auſſi nulle en prenant le milieu entre n obſervations. Il eſt facile de voir que cette queſtion ſe réduit à celle-ci : „ ayant n dès dont cha- „ cun ait a faces marquées d'un zéro, b faces marquées „ d'une unité poſitive, & b faces marquées d'une unité „ négative, enſorte que le nombre total des faces ſoit „ $a+2b$, trouver la probabilité qu'il y a d'amener „ zéro en jettant tous ces dès au hazard. Or on ſait par la théorie des combinaiſons que ſi on élève le trinome $a+b\,(x+x^{-1})$ à la puiſſance n, le coefficient du terme abſolu c'eſt-à-dire ou la puiſſance de x ſera zéro, dénotera le nombre des cas ou des hazards, ou la ſomme des points marqués par tous les dès ſera égale à zéro : donc nommant ce coefficient A, on aura, à cauſe que le nombre de toutes les combinaiſons poſſibles eſt $(a+2b)^n$, on aura, dis-je, $\frac{A}{(a+2b)^n}$ pour la probabilité cherchée.

Tout ſe réduit donc à trouver le coefficient A; or c'eſt à quoi on peut parvenir de pluſieurs manières différentes.

1.° Si on développe la puiſſance $(a+b\,(x+x^{-1}))^n$ ſuivant le théorême de nevvton on aura, comme l'on ſait,

$$a^n + n\,a^{n-1}b\,(x+x^{-1}) + \frac{n(n-1)}{2}\,a^{n-2}b^2\,(x+x^{-1})^2 + \&c.$$

or il eſt facile de voir que les puiſſances impaires de $x+x^{-1}$ ne renferment aucun terme ſans x, & que dans les puiſſances paires il y a toujours un terme ſans x, qui eſt celui du milieu, dans lequel les expoſans de x, & x^{-1} ſont les mêmes ;

ainſi le terme. ſans x de $(x + x^{-1})^2$ ſera 2,

celui de $(x + x^{-1})^4$ ſera $\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2}$

celui de $(x + x^{-1})^6$ ſera $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

& ainſi des autres ; donc on aura en général

$$A = a^n + \frac{2}{1} \cdot \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 +$$

$$\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{n-4} b^4 +$$

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{n(n-1)(n-2) \ldots (n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} a^{n-6} b^6 + \text{&c.}$$

c' eſt-à-dire

$$A = a^n + n(n-1) a^{n-2} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 2} a^{n-4} b^4$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2) \ldots (n-5)}{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-6} b^6 + \text{&c.}$$

2.° Il eſt viſible que le trinome $a + b(x + x^{-1})$ peut ſe décompoſer en ces deux binomes $\alpha + \beta x$, $\alpha + \beta x^{-1}$; ce qui donne par la comparaiſon des termes $\alpha^2 + \beta^2 = a$, & $\alpha \beta = b$; d'où l'on tire $\alpha \pm \beta = \sqrt{a \pm 2b}$, & de là

$$\alpha = \frac{\sqrt{(a+2b)} + \sqrt{(a-2b)}}{2}$$

$$\beta = \frac{\sqrt{(a+2b)} - \sqrt{(a-2b)}}{2}$$

Cela poſé on aura donc $(a + b(x + x^{-1}))^n$

$= (\alpha + \beta x)^n \times (\alpha + \frac{\beta}{x})^n =$

$$\left(\alpha^n + n\ \alpha^{n-1} \beta x + \frac{n(n-1)}{2} \alpha^{n-2} \beta^2 x^2 + \text{&c.}\right) \times$$

$$\left(\alpha^n + \frac{n\ \alpha^{n-1} \beta}{x} + \frac{n(n-1)}{2} \frac{\alpha^{n-2} \beta^2}{x^2} + \text{&c.}\right)$$

d' où il eſt facile de conclure qu' on aura

$$A = \alpha^{2n} + (n\alpha^{n-1}\beta)^2 + \left(\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\alpha^{n-2}\beta^2\right)^2$$
$$+ \left(\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^{n-3}\beta^3\right)^2 + \text{&c.}$$

Corollaire I.

2. Soit $a = b$, c'eſt-à-dire qu'il y ait un nombre égal de cas qui donnent o, ou $+1$, ou -1 d'erreur; la probabilité d'avoir un réſultat exact dans chaque obſervation particulière ſera $\frac{a}{a+2b} = \frac{1}{3}$; & celle d'avoir un réſultat exact, en prenant le terme moyen entre les réſulats de n obſervations, ſera ſuivant la première formule, (en diviſant le haut & le bas de la fraction $\frac{A}{(a+2b)^n}$ par a^n)

$$\frac{1 + n(n-1) + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2} + \frac{n(n-1)\ldots(n-5)}{1\cdot 1\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3} + \text{&c.}}{3^n}$$

Donc en faiſant ſucceſſivement $n = 1, 2, 3,$ &c. on aura

n	probab.
1	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{7}{27}$
4	$\frac{19}{81}$
5	$\frac{51}{243}$
6	$\frac{141}{729}$
&c.	

On voit par cette table que la probabilité que l'erreur ſoit nulle diminue à meſure que l'on prend un plus grand nombre d'obſervations, de ſorte que ſi on vouloit eſtimer l'avantage qu'il peut y avoir à prendre le milieu entre pluſieurs obſervations, par l'excès de la probabilité que l'erreur ſoit nulle dans le réſultat moyen, ſur celle que l'erreur ſoit auſſi nulle dans chaque réſultat particulier, on trouveroit dans le cas dont il s'agit ici que l'avantage ſeroit toujours négatif, c'eſt-à-dire qu'il ſe changeroit en déſavantage, lequel iroit même en augmentant plus il y auroit d'obſervations ; d'où il ſemble qu'on pourroit conclure, que dans ce cas il vaudroit mieux s'en tenir à une obſervation unique, que de prendre le milieu entre pluſieurs obſervations ; mais il y a une conſidération eſſentielle à faire ſur cette matière, de laquelle il réſulte qu'il eſt toujours plus avantageux dans la pratique de multiplier des obſervations autant que l'on peut, c'eſt ce que nous diſcuterons plus bas.

Corollaire II.

3. Soit maintenant $a = 2b$, enſorte que le nombre des cas qui donnent un réſultat exact ſoit égal au nombre de ceux qui peuvent donner une erreur de $+1$, ou -1 ; dans ce cas il vaudra mieux ſe ſervir de la ſeconde formule ; car on aura $\alpha = \sqrt{b}$, $\beta = \sqrt{b}$, de ſorte qu'à cauſe de $a + 2b = 4b$, on aura, en diviſant le haut & le bas de la fraction, $\frac{A}{(a+2b)^n}$ par b^n,

$$\frac{1 + n^2 + \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2 + \left(\frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}\right)^2 + \&c.}{4^n}$$

pour la probabilité que l'erreur ſoit nulle en prenant le milieu entre n obſervations.

Donc faiſant ſucceſſivement $n = 1, 2, 3$ &c. on aura les réſultats ſuivans

n	prob.
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{3}{8}$
3	$\frac{5}{16}$
4	$\frac{35}{128}$

&c.

où l'on voit que la probabilité diminue à meſure que n augmente comme dans le cas du corollaire préc.

Corollaire III.

4. Soit $b = 2a$ de manière que le nombre des cas qui peuvent donner une erreur d'une unité tant en plus qu'en moins ſoit double de celui où l'on auroit un réſultat exact, on aura ici pour la probabilité que l'erreur ſoit nulle en prenant le milieu entre n obſervations

$$\frac{1+4n(n-1)+\frac{16n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 2}+\frac{26n(n-1)\ldots(n-5)}{2\cdot 3\cdot 2\cdot 3}+\&c.}{5^n}$$

Donc faiſant ſucceſſivement $n = 1, 2, 3$, on aura

n	prob.
1	$\frac{1}{5}$
2	$\frac{9}{25}$
3	$\frac{1}{5}$
4	$\frac{29}{125}$

&c.

Ainſi pour 2 obſervations l'avantage ſera de $\frac{9}{25} - \frac{1}{5} = \frac{4}{25}$, pour trois il ſera $\frac{1}{5} - \frac{1}{5} = o$; pour quatre égal à $\frac{29}{125} - \frac{1}{5} = \frac{4}{125}$; &c. d'où il paroit que le plus grand avantage a lieu en prenant le milieu entre deux obſervations ſeulement.

Remarque I.

5. Pour faciliter davantage la ſolution du problême précédent, il eſt bon de chercher la loi que ſuivent les termes de la ſérie qui répreſentent les probabilités qui répondent à 1, 2, 3 &c. obſervations ; or ſi on prend la fraction $\frac{1}{1 - z\,(a + b\,(x + x^{-1}))}$ & qu'on la développe en ſérie ſuivant les puiſſances de x, on aura comme l'on ſait $1 + z\,(a + b\,(x + x^{-1})) + z^2\,(a + b\,(x + x^{-1}))^2 +$ &c. de ſorte que dans cette ſérie le coefficient de z^n ſera la puiſſance $n^{ème}$ de $a + b\,(x + x^{-1})$; donc ſi on nomme A', A'', A''' &c. les valeurs de A qui répondent à $n = 1$, 2, 3 &c., c'eſt-à-dire, les termes ſans x des puiſſances $a + b\,(x + x^{-2})$, $(a + b\,(x + x^{-2}))^2$ &c. il eſt clair que la ſérie $1 + A'z + A''z^2 + A'''z^3 +$ &c. ſera égale à la ſomme des termes ſans x de la fraction $\frac{1}{1 - z\,(a + b\,(x + x^{-1}))}$ développée ſuivant les puiſſances de x, & de x^{-1} ; de ſorte que ſi on repreſente par $Z + Z'\left(x + \frac{1}{x}\right) + Z''\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) +$ &c. la ſérie qui réſulte du développement de cette fraction ſuivant les puiſſances de x, & de $\frac{1}{x}$, (car il eſt facile de voir que la ſérie dont-il s'agit doit avoir néceſſairement cette forme) on aura

$Z = 1 + A' z + A'' z^2 +$ &c. ; ainſi connoiſſant la fonction Z il n'y aura plus qu'à la réduire en ſérie ſuivant les puiſſances de z pour avoir les quantités A, A', A'' &c. Pour cela je réduis d'abord le trinome $1 - a z - b z (x + x^{-1})$ en $(p - q x)(p - q x^{-1})$ ce qui me donne $p^2 + q^2 = 1 - a z$, & $p q = b z$; enſuite je réduis la fraction

$$\frac{1}{(p+qx)(p-qx^{-1})} \text{ en } \alpha + \frac{\beta}{p - q x} + \frac{\beta}{p - q x^{-1}}$$

& je trouve $\alpha = \frac{1}{q^2 - p^2}$, $\beta = \frac{p}{p^2 - q^2}$;

maintenant $\frac{1}{p - q x} = \frac{1}{p} + \frac{qx}{p^2} + \frac{q^2 x^2}{p^3} +$ &c.

& de même $\frac{1}{p - q x^{-1}} = \frac{1}{p} + \frac{q}{p^2 x} + \frac{q^2}{p^3 x^2} +$ &c.

donc on aura $Z = \alpha + \frac{2\beta}{p}$, $Z' = \frac{\beta q}{p^2}$, $Z'' = \frac{\beta q^2}{p^3}$

$Z''' = \frac{\beta q^3}{p^4}$ &c. ;

Donc $Z = \frac{1}{q^2 - p^2} + \frac{2}{p^2 - q^2} = \frac{1}{p^2 - q^2} = \frac{1}{(p \cdot q)(p \; q)}$;

mais puiſque $p^2 + q^2 = 1 - a z$, & $p q = b z$, on aura $p + q = \sqrt{1 - a z + 2 b z}$, $p - q = \sqrt{1 - a z - 2 b z}$;

donc $(p + q)(p - q) = \sqrt{(1 - a z)^2 - 4 b^2 z^2}$; donc enfin

$$Z = \frac{1}{\sqrt{(1 - 2 a z + (a^2 - 4 b^2) z^2)}}$$

$= 1 + A' z + A'' z^2 + A''' z^3 +$ &c.

deſorte que l'on aura par les formules connues

$A' = a$

$A'' = \frac{3 a A' + 4 b^2 - a^2}{2}$

$A''' = \frac{5 a A' + 2 (4 b^2 - a^2) A'}{3}$

$A^{IV} = \frac{7 a A''' + 3 (4 b^2 - a^2) A''}{4}$

&c.

Dénotons par P', P'', P''' &c. les probabilités que l'erreur ſoit nulle en prenant le milieu entre 1, 2, 3 &c. obſervations, & l'on aura $P' = \frac{A'}{a+2b}$, $P'' = \frac{A''}{(a+2b)^2}$ $P''' = \frac{A'''}{(a+2b)^3}$ &c.; d'ou $A' = (a+2b)\ P'$, $A'' = (a+2b)^2\ P''$, $A''' = (a+2b)^3\ P'''$ &c. donc ſubſtituant ces valeurs dans les formules précédentes, & faiſant pour plus de ſimplicité $\frac{2b}{a} = r$, on aura $P' = \frac{1}{1+r}$

$$P'' = \frac{3P' + r - 1}{2(1+r)}$$

$$P''' = \frac{5P'' + 2(r-1)P'}{3(1+r)}$$

$$P^{IV} = \frac{7P''' + 3(r-1)P''}{4(1+r)}$$

$$P^{V} = \frac{9P^{IV} + 4(r-1)P'''}{5(1+r)}$$

&c.

Remarque II.

6. Si on fait $r = 1$ on aura le cas du corol. 2, où $a = 2b$, & l'on trouvera

$$P' = \frac{1}{2},\ P'' = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4},\ P''' = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}$$ &c.

& en général

$$P^n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots 2n-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n}$$

De là on voit que la probabilité diminue toujours à méſure que n augmente, ce que nous avons déjà obſervé dans le corollaire cité; de ſorte qu'en prenant $n = \infty$ la probabilité deviendra infiniment petite, ou nulle; en effet par la quadrature du cercle de Wallis on a (π étant l'arc de 180.° dégrés)

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \ldots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdots}$$

c' eſt-à-dire, en prenant $n = \infty$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \ldots\ldots 2n \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \ldots 2n-1 \cdot 2n-1 \cdot 2n+1}$$

donc multipliant par $2n + 1$, & tirant la racine carrée on aura

$$\sqrt{\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots 2n-1}$$

donc lorſque $n = \infty$ on aura

$$P^n = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} = 0.$$

Il eſt bon de remarquer que puiſque nous avons trouvé dans le coroll. cité pour la probabilité P^n l' expreſſion

$$\frac{1 + n^2 + \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2 + \left(\frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}\right)^2 + \text{ &c.}}{4^n}$$

on aura, en comparant cette expreſſion avec la précédente, l' équation

$$1 + n^2 + \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2 + \left(\frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}\right)^2 + \text{ &c.} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2n-1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} 2^n$$

laquelle eſt d' autant plus remarquable qu' elle ne paroit pas aiſée à démontrer *a priori.*

Remarque III.

7. Par les formules de la Remarque 1^ere^ on aura en général

$$P^n = \frac{(2n-1)P^{n-1} + (n-1)(r-1)P^{n-2}}{n(r+1)}$$

$$P^{n+1} = \frac{(2n+1)P^n + n(r-1)P^{n-1}}{(n+1)(r+1)}$$

$$P^{n+2} = \frac{(2n+3)P^{n+1} + (n+1)(r-1)P^n}{(n+2)(r+1)}$$

&c.

où les exposans $n-2$, $n-1$, n &c. de P ne dénotent pas des puissances, mais seulement le quantième du rang. Or si n est un nombre assez grand, il est clair que les fractions $\frac{2n-1}{n}$, $\frac{2n+1}{n+1}$, $\frac{2n+3}{n+2}$ &c. feront à très-peu près $= 2$; & que les fractions $\frac{n-1}{n}$, $\frac{n}{n+1}$, $\frac{n+1}{n+2}$ feront aussi à très-peu près $= 1$; de sorte qu'on aura dans cette hypothèse

$$P^n = \frac{P^{n-1} + (r-1)\,P^{n-2}}{r+1}$$

$$P^{n+1} = \frac{P^n + (r-1)\,P^{n-1}}{r+1}$$

&c.

d'où l'on voit que les quantités P^n, P^{n+1} &c. forment une suite recurrante dont le dénominateur de la fraction génératrice seroit $x^2 - \frac{x}{r+1} - \frac{r-1}{r+1}$; ainsi on aura en général

$$P^{n+s} = A\left(\frac{1+\sqrt{(r^2-3)}}{2(1+r)}\right)^s + B\left(\frac{1-\sqrt{(4r^2-3)}}{2(1+r)}\right)^s$$

& pour déterminer les coefficiens A, & B, on supposera que les termes P^n, & P^{n+1} soient connus, ce qui donnera $P^n = A + B$, &

$$P^{n+1} = A\,\frac{1+\sqrt{(4r^2-3)}}{2(1+r)} + B\,\frac{1-\sqrt{(4r^2-3)}}{2(1+r)}$$

d'où

$$A = \frac{2(1+r)\,P^{n+1} - (1-\sqrt{(4r^2-3)})\,P^n}{2\sqrt{(4r^2-3)}}$$

$$B = \frac{(1+\sqrt{(4r^2-3)})\,P^n - 2(1+r)\,P^{n+1}}{2\sqrt{(4r^2-3)}}$$

d' où

$$P^{n+s} = \left(\frac{P^n}{2} + \frac{2(1+r)\,P^{n+1} - P^n}{2\sqrt{(4r^2-3)}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{(4r^2-3)}}{2(1+r)}\right)^s + \left(\frac{P^n}{2} - \frac{2(1+r)\,P^{n+1} - P^n}{2\sqrt{(4r^2-3)}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{(4r^2-3)}}{2(1+r)}\right)^s$$

& cette formule ſera d'autant plus exacte qu'on prendra le nombre n plus grand.

Ainſi après avoir calculé les termes P^n & P^{n+1} ſoit par les formules de l'art. 1, ſoit par celles de la Remarque 1.ere, on pourra trouver, à très-peu près, tous les termes ſuivans par la formule précédente.

Au reſte il eſt facile de voir par cette formule que la probabilité ſera nulle à l'infini; c'eſt-à-dire, lorſque $s = \infty$; en effet il eſt clair que quel que ſoit r, pourvu que ce ſoit un nombre poſitif, les quantités $\frac{1 \pm \sqrt{(4r^2-3)}}{2(1+r)}$ ſeront toujours < 1; car ſuppoſons, s'il eſt poſſible $\frac{1+\sqrt{(4r^2-3)}}{2(1+r)} > 1$ on aura donc $4r^2 - 2 \pm 2\sqrt{(4r^2-3)} > 4(1 + 2r + r^2)$ ſavoir $\pm \sqrt{(4r^2-3)} > 3 + 4r$; & $4r^2 - 3 > 16r^2 + 24r + 9$ ſavoir $0 > 12r^2 + 24r + 12$, ce qui ne ſe peut; donc en faiſant $s = \infty$ les quantités $\left(\frac{1+\sqrt{(4r^2-3)}}{2(1+r)}\right)^s$, & $\left(\frac{1-\sqrt{(4r^2-3)}}{2(1+r)}\right)^s$ deviendront nulles; & par conſéquent P^{n+s} auſſi.

Scholie.

8. Soit ρ le réſultat que chaque obſervation devroit donner ſi elle étoit exacte, puiſque on ſuppoſe que l'on puiſſe ſe tromper d'une unité tant en plus qu'en moins, on aura dans chaque obſervation un de ces trois réſultats

p, $p-1$, & $p+1$; donc si on a deux observations, & qu'on prenne le milieu entre leurs résultats, c'est-à-dire, la demi somme de ces résultats, on aura un de ces cinq résultats $\frac{2p}{2}$, $\frac{2p-1}{2}$, $\frac{2p+1}{2}$, $\frac{2p-2}{2}$, $\frac{2p+2}{2}$; savoir p, $p-\frac{1}{2}$, $p+\frac{1}{2}$, $p-1$, $p+1$; ainsi, dans ce cas, l'erreur pourra être 1, ou $\frac{1}{2}$ tant en plus qu'en moins; on verra de même, qu'en prenant le milieu entre trois observations, l'erreur pourra être, 1, ou $\frac{2}{3}$, ou $\frac{1}{3}$ tant en plus qu'en moins, & ainsi de suite. Ainsi quoique la probabilité que l'erreur soit nulle puisse être plus petite lorsqu'on prend le résultat moyen de plusieurs observations, que lorsque on prend le résultat de chaque observation en particulier; cependant si on cherche la probabilité que l'erreur ne surpasse pas $\frac{1}{2}$, ou $\frac{1}{3}$ &c. on trouvera que cette probabilité sera plus grande dans le premier cas que dans le second; en effet, dans le premier cas il n'y a d'autres cas favorables que ceux où l'erreur est absolument nulle; mais dans le second, les cas favorables sont non seulement ceux où l'erreur est nulle, mais aussi ceux où l'erreur est $\frac{1}{2}$, ou $\frac{1}{3}$ &c.; & c'est par cette considération qu'il est toujours plus avantageux de prendre le milieu entre les résultats de plusieurs observations, que de s'en tenir au résultat de chaque observation en particulier. Nous allons examiner la question sous ce point de vue dans le problême suivant.

Problême II.

9. Les mêmes choſes étant ſuppoſées que dans le problême précédent trouver la probabilité qu'en prenant le milieu entre les réſultats de n obſervations, l'erreur ne ſurpaſſera pas la fraction $\frac{m}{n}$, m étant $< n$.

En prenant le milieu entre les réſultats de n obſervations, il eſt clair que l'erreur peut être, ou o, ou $\pm\frac{1}{n}$, ou $\pm\frac{2}{n}$, ou $\pm\frac{3}{n}$ &c. juſqu'à $\pm\frac{n}{n}$ ſavoir ± 1; ainſi la probabilité que l'erreur ne ſoit pas plus grande que $\pm\frac{m}{n}$, ſera la ſomme des probabilités que l'erreur ſera nulle, ou $\pm\frac{1}{n}$, ou $\pm\frac{2}{n}$ &c. juſqu'à $\pm\frac{m}{n}$. Voyons donc d'abord quelle eſt la probabilité que l'erreur ſera $\pm\frac{\mu}{n}$.

En ramenant cette queſtion aux dès, comme nous l'avons pratiqué dans le probl. 1., il eſt clair qu'elle ſe réduit à chercher la probabilité d'amener $+\mu$, ou $-\mu$ points avec n dès, dont chacun ait a faces marquées zéro, b faces marquées $+1$, & b faces marquées -1. Pour cela il n'y a qu'à élever le trinome $a + b(x + x^{-1})$ à la puiſſance n, & le coefficient de x^{μ} dénotera le nombre des cas où la ſomme des points de tous les dès ſera μ, de même que celui de $x^{-\mu}$ dénotera le nombre des cas où la ſomme des points ſera $-\mu$; ainſi la ſomme de ces deux coefficiens diviſée par $(a + 2b)^n$, qui eſt le nombre de tous les cas, donnera la probabilité cherchée.

Or on a $(a + b(x + x^{-1}))^n = a^n + n a^{n-1} b (x + x^{-1}) + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} b^2 (x + x^{-1})^2 +$ &c., & de plus

$(x + x^{-1})^2 = x^2 + x^{-2} + 2$

$(x + x^{-1})^3 = x^3 + x^{-3} + 3(x + x^{-1})$

$(x + x^{-1})^4 = x^4 + x^{-4} + 4(x^2 + x^{-2}) + \frac{4 \cdot 3}{2}$

$(x + x^{-1})^5 = x^5 + x^{-5} + 5(x^3 + x^{-3}) + \frac{5 \cdot 4}{2}(x + x^{-1})$

& ainſi de ſuite ;

Donc ſi on ſuppoſe $(a + b(x + x^{-1}))^n = A + B(x + x^{-1}) + C(x^2 + x^{-2}) + D(x^3 + x^{-3}) +$ &c.

on aura

$$A = a^n + \frac{2}{1} \cdot \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} b^2 +$$
$$\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} a^{n-4} b^4 +$$
$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{n(n-1) \ldots (n-5)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} a^{n-6} b^6 + \text{&c.}$$

$$B = n a^{n-1} b + \frac{3}{1} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} a^{n-3} b^3$$
$$+ \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^{n-5} b^5$$
$$+ \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{n(n-1) \ldots (n-6)}{2 \cdot 3 \ldots 7} a^{n-7} b^7 + \text{&c.}$$

$$C = \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} b^2 + \frac{4}{1} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} a^{n-4} b^4$$
$$+ \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot \frac{n(n-1) \ldots (n-5)}{2 \cdot 3 \ldots 6} a^{n-6} b^6$$
$$+ \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{n(n-1) \ldots (n-7)}{1 \cdot 2 \ldots 8} a^{n-8} b^8 + \text{&c.}$$

& ainſi de ſuite.

Donc ſi on appelle M le terme de la ſérie A, B, C &c. dont le quantième ſera $\mu + 1$, il eſt facile de

voir qu' on aura

$$M = \frac{n(n-1)\ldots(n-\mu+1)}{1\cdot 2\ldots\ldots\mu} a^{n-\mu} b^{\mu}$$
$$+ \frac{\mu+2}{1}\cdot\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-\mu-1)}{1\cdot 2\ldots\ldots\mu+2} a^{n-\mu-2} b^{\mu+2}$$
$$+ \frac{(\mu+4)(\mu+3)}{1\cdot 2}\cdot\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-\mu-3)}{1\cdot 2\ldots\ldots\mu+4} a^{n-\mu-4} b^{\mu+4}$$
$$+ \&c.$$

Or ce terme M eſt le coefficient des puiſſances x^{μ} & $x^{-\mu}$; de ſorte qu' on aura $\frac{2M}{(a+2b)^n}$ pour la probabilité que l'erreur ſoit $\pm\frac{\mu}{n}$. Ainſi la probabilité que l'erreur ne ſurpaſſera pas $\pm\frac{\mu}{n}$ ſera repréſentée par la ſérie

$$\frac{A + 2B + 2C + 2D + \&c. + 2M}{(a+2b)^n}.$$

Pour faciliter la recherche des valeurs de A, B, C &c. il eſt bon de faire voir comment ces quantités dépendent les unes des autres; pour cela on reprendra l'équation

$$(a + b(x + x^{-1}))^n = A + B(x + x^{-1}) + C(x^2 + x^{-2}) + D(x^3 + x^{-3}) + \&c.$$

& prenant les différentielles logarithmiques on aura après avoir diviſé par $\frac{dx}{x}$

$$\frac{nb\left(x - \frac{1}{x}\right)}{a + b(x + x^{-1})} = \frac{B\left(x - \frac{1}{x}\right) + 2C\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) + \&c.}{A + B(x + x^{-1}) + C(x^2 + x^{-2}) + \&c}$$

donc multipliant en croix, il viendra

$$nbA(x - x^{-1}) + nbB(x^2 - x^{-2}) + nbC(x^3 - x^{-3} - x + x^{-1})$$
$$+ nbD(x^4 - x^{-4} - x^2 + x^{-2}) + \&c. =$$
$$aB(x - x^{-1}) + 2aC(x^2 - x^{-2}) + 3aD(x^3 - x^{-3}) + \&c.$$
$$+ bB(x^2 - x^{-2}) + 2bC(x^3 - x^{-3} + x - x^{-1})$$
$$+ 3bD(x^4 - x^{-4} + x^2 - x^{-2}) + \&c.$$

de sorte qu' en comparant les termes on aura

$$nb\,(A-C) = a\,B + 2\,b\,C$$
$$nb\,(B-D) = 2\,aC + b\,(B + 3\,D)$$
$$nb\,(C-E) = 3\,aD + b\,(2\,C + 4\,E)$$

&c.

d' où en faisant pour plus de simplicité $\frac{a}{b} = K$, on aura

$$C = \frac{n\,A - K\,B}{n+2}$$
$$D = \frac{(n-1)\,B - 2\,K\,C}{n+3}$$
$$E = \frac{(n-2)\,C - 3\,K\,D}{n+4}$$

&c.

Ainsi en connoissant les deux premiers termes A, & B on pourra trouver successivement tous les autres.

Corollaire.

10. Supposons, comme dans l' art. 2, $a = b$, ensorte que l' on ait $K = 1$, & faisant successivement $n = 1, 2, 3$ &c. & $a = 1$, ce qui est permis, on trouvera les valeurs suivantes

n	A	B	C	D	E	F	G	&c.
1	1	1	0	0	0	0	0	
2	3	2	1	0	0	0	0	
3	7	6	3	1	0	0	0	
4	19	16	10	4	1	0	0	
5	51	45	30	15	5	1	0	
6	141	126	90	50	21	6	1	

&c.

De là on formera la table suivante des probabilités

Valeurs

Valeurs du nombre n des obſerv.	Probabilités que l'erreur ne ſurpaſſera pas les fractions $\pm\frac{0}{n}$	$\pm\frac{1}{n}$	$\pm\frac{2}{n}$	$\pm\frac{3}{n}$	$\pm\frac{4}{n}$	$\pm\frac{5}{n}$
1	$\frac{1}{3}$	...	...	...	...	...
2	$\frac{3}{9}$	$\frac{7}{9}$	...	...	...	...
3	$\frac{7}{27}$	$\frac{19}{27}$	$\frac{25}{27}$	...	...	...
4	$\frac{19}{81}$	$\frac{51}{81}$	$\frac{71}{81}$	$\frac{79}{81}$	...	...
5	$\frac{51}{243}$	$\frac{141}{243}$	$\frac{201}{243}$	$\frac{231}{243}$	$\frac{241}{243}$	...
6	$\frac{141}{729}$	$\frac{393}{729}$	$\frac{573}{729}$	$\frac{673}{729}$	$\frac{715}{729}$	$\frac{727}{729}$
&c.						

On voit par cette table, qu'en prenant le milieu entre deux obſervations, la probabilité que l'erreur ſoit nulle ſera $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, & celle que l'erreur ne ſurpaſſera pas $\frac{1}{2}$ tant en plus qu'en moins ſera $\frac{7}{9}$; or dans chaque obſervation particulière, il y a $\frac{1}{3}$ de probabilité que l'erreur ſera o, & comme (hyp.) l'erreur ne peut être que o

ou $\pm$ 1, il eſt clair que la probabilité que l'erreur ne ſurpaſſera pas $\frac{1}{2}$ ſera de même $\frac{1}{3}$; ainſi quoique la probabilité que l'erreur ſera nulle ſoit la même, ſoit qu'on prenne le réſultat moyen entre deux obſervations, ou qu'on prenne le réſultat particulier d'une obſervation unique, cependant la probabilité que l'erreur ne ſurpaſſera pas $\frac{1}{2}$ ſera plus grande dans le premier cas que dans le ſecond, ces deux probabilités étant comme $\frac{7}{9} : \frac{1}{3}$, c'eſt-à-dire, dans la raiſon de 7 : 3.

De même en prenant le milieu entre trois obſervations on aura $\frac{7}{27}$ pour la probabilité que l'erreur ſera nulle, $\frac{29}{27}$ pour la probabilité que l'erreur ne ſera pas $> \pm \frac{1}{3}$, & $\frac{25}{27}$ pour celle que l'erreur ne ſera pas $> \pm \frac{2}{3}$; mais dans chaque obſervation particulière la probabilité que l'erreur ſoit nulle eſt $\frac{1}{3}$, & celle que l'erreur ne ſurpaſſe pas $\frac{1}{3}$ ou $\frac{2}{3}$ eſt de même $\frac{1}{3}$ parceque (hyp.) l'erreur ne peut être que nulle, ou $\pm$ 1; donc la probabilité que l'erreur ſoit nulle ſera, à la vérité, plus grande dans le réſultat particulier d'une obſervation unique que dans le réſultat moyen de trois obſervations, & cela dans la raiſon de 9 : 7; mais, en revanche, la probabilité que l'erreur ne ſurpaſſera pas $\pm \frac{1}{3}$ ſera plus grande dans le ſecond cas que dans le premier en raiſon de 19 : 9, & celle que l'erreur ne ſurpaſſera pas $\pm \frac{2}{3}$ le ſera encore davantage, cette pro-

babilité étant, dans le second cas, plus grande que dans le premier en raison de 25 : 9.

Voilà donc en quoi consiste principalement l'avantage qu'il y a à prendre le milieu entre les résultats de plusieurs observations. Pour rendre la chose encor plus sensible nous allons rechercher les probabilités que l'erreur ne surpassera pas la fraction $\frac{1}{2}$ en supposant successivement $n = 1, 2, 3$, &c. c'est-à-dire, pour une observation unique, pour deux, pour trois &c., & nous aurons

n	1	2	3	4	5	6	&c.
prob.	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{19}{27}$	$\frac{71}{81}$	$\frac{201}{243}$	$\frac{673}{729}$	&c.

ou bien en reduisant au même dénominateur 729.

n	1	2	3	4	5	6	&c.
prob.	$\frac{243}{729}$,	$\frac{567}{729}$,	$\frac{513}{729}$,	$\frac{639}{729}$,	$\frac{603}{729}$,	$\frac{673}{729}$,	&c.

On voit par là que la probabilité que l'erreur ne surpassera pas $\frac{1}{2}$ va en augmentant à mesure que l'on prend un plus grand nombre d'observations, mais avec cette différence, que la probabilité est plus grande pour deux observations que pour trois, pour quatre que pour cinq, & en général pour un nombre pair quelconque que pour le nombre impair qui le suit immédiatement; de sorte que dans l'hypothèse dont il s'agit, il est plus avantageux de ne prendre le milieu qu'entre un nombre quelconque pair d'observations.

Remarque I.

11. Nous avons vu dans l'art. 5. que si on développe la fraction

$$\frac{1}{1 - \zeta\left(a + b\left(x + \frac{1}{x}\right)\right)}$$ en une série de cette forme

$$Z + Z'\left(x + \frac{1}{x}\right) + Z''\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \text{&c.}$$

Z, Z', Z'' &c. étant des fonctions de z; on aura $Z = \frac{1}{p^2 - q^2}$, $Z' = \frac{\beta q}{p^2} = \frac{q}{p} Z$, $Z'' = \frac{\beta q^2}{p^3} = \frac{p}{q} Z'$ & ainſi de ſuite, p, & q étant telles que $p^2 + q^2 = 1 - az$ & $pq = bz$, ce qui donne $p^2 - q^2 = \sqrt{(1 - 2az + (a^2 - 4b^2)z^2)}$ & de là $\frac{q}{p} = \frac{1 - az - \sqrt{(1 - 2az + (a^2 - 4b^2)z^2)}}{2bz}$

de ſorte qu'en faiſant pour plus de ſimplicité $\zeta = \sqrt{(1 - 2az + (a^2 - 4b^2)z^2)}$ on aura

$$Z = \frac{1}{\zeta}, \quad Z' = \frac{1 - az - \zeta}{2bz\zeta},$$

$$Z'' = \left(\frac{1 - az - \zeta}{2bz}\right)^2 \frac{1}{\zeta}, \text{ & en général}$$

$$Z^\mu = \frac{\left(\frac{1 - az - \zeta}{2bz}\right)^\mu}{\zeta}$$

Or ſi on développe cette quantité en une ſérie de puiſſances rationelles & entieres de z, on verra aiſément par ce que nous avons dit plus haut, que le coefficient d'une puiſſance quelconque, comme z^n, dénotera le nombre des cas où la ſomme des erreurs de n obſervations pourra être $+\mu$, ou $-\mu$, de ſorte que le double de ce coefficient exprimera le nombre de tous les cas où l'erreur moyenne ſera $\pm\frac{\mu}{n}$. De là il eſt facile de conclure que la quantité

$$\frac{1 + 2\frac{1 - az - \zeta}{2bz} + 2\left(\frac{1 - az - \zeta}{2bz}\right)^2 + \&c. + 2\left(\frac{1 - az - \zeta}{2bz}\right)^\mu}{\zeta}$$

étant regardée comme une fonction de z & développée ſuivant les puiſſances de cette variable, donnera une ſérie

de telle nature que le coefficient d' une puiſſance quelconque ζ^n exprimera juſtement le nombre de cas où l' erreur moyenne pourra être renfermée dans ces limites $-\frac{\mu}{n}$, $+\frac{\mu}{n}$; de ſorte que ce coefficient étant diviſé par le nombre total de cas $(a + 2b)^n$ on aura la valeur de la probabilité que l' erreur moyenne ne ſurpaſſera pas la fraction $\frac{\mu}{n}$ ſoit en plus ou en moins. Or la quantité dont il s' agit n' étant autre choſe qu' une ſérie géometrique, elle peut ſe mettre ſous cette forme plus ſimple

$$\frac{1 - \left(\frac{1 - a\zeta - \zeta}{2b\zeta}\right)^{\mu+1}}{\zeta\left(1 - \frac{1 - a\zeta - \zeta}{2b\zeta}\right)} - 1 \quad 2$$

Ainſi toute la difficulté conſiſtera à reduire cette même quantité en ſérie infinie qui procède ſuivant les puiſſances de ζ. Pour en venir plus facilement à bout, on la ſuppoſera $=$ à une indéterminée y, & l' on aura une équation entre y, & ζ, qu' on pourra, par des différentiations, délivrer, tant de la puiſſance $\mu + 1$, que de l' irrationalité de ζ; par ce moyen on aura une équation différentielle du ſecond degré entre y, & ζ; & il n' y aura plus qu' à ſuppoſer $y = 1 + A\zeta + B\zeta^2 +$ &c. & déterminer les coefficiens A, B &c. par la comparaiſon des termes.

Au reſte comme ce calcul eſt un peu long nous nous contentons de l' indiquer ici, pour mettre ſur la voie ceux qui voudront pouſſer cette théorie plus loin.

Scholie.

12. Nous avons supposé dans les deux problêmes précédens qu'il y avoit un nombre égal de cas pour avoir une erreur positive, & pour en avoir une négative; si cela n'étoit pas ainsi, & que le nombre des cas qui donneroient o, $+1$, & -1 d'erreur fussent a, b, & c, alors on pourroit resoudre les problêmes avec la même facilité en considérant le trinome $a + b\,x + c\,x^{-1}$, à la place de $a + b\,(x + x^{-1})$ pour avoir le nombre des cas où l'on auroit une erreur moyenne donnée; & prenant ensuite $(a + b + c)^n$ pour avoir le nombre total des cas à la place de $(a + 2\,b)^n$; on pourroit même, sans faire un nouveau calcul, adapter à ce cas-ci les formules que nous avons déjà trouvées; car si dans le trinome $a + b\,x + \frac{c}{x}$ on met $x\sqrt{\frac{c}{b}}$ à la place de x, il deviendra $a + \sqrt{b\,c}\left(x + \frac{1}{x}\right)$; ainsi il n'y aura qu'à mettre dans le trinome $a + b\left(x + \frac{1}{x}\right)$ des problêmes précédens $\sqrt{b\,c}$ à la place de b, & ensuite $x\sqrt{\frac{b}{c}}$ à la place de x; du reste nous allons traiter ce cas d'une manière beaucoup plus générale dans le problême suivant.

Problême III.

13. Supposant que chaque observation soit sujette à une erreur d'une unité en moins, & à une erreur de r unités en plus, & que le nombre des cas qui peuvent donner o, -1, $+r$ d'erreur soit respectivement a, b, c, on demande qu'elle est la probabilité que l'erreur moyenne de plusieurs observations sera renfermée dans des limites données.

Soit n le nombre des observations dont on veut prendre le milieu, on formera la puissance n^{eme} du trinome $a + \frac{b}{x} + c\,x^r$, & le coefficient d'une puissance quelconque x^μ dénotera le nombre des cas où la somme des erreurs sera μ, & par conséquent, où l'erreur moyenne sera $\frac{\mu}{n}$. Considerons donc la quantité $\left(a + \frac{b}{x} + c\,x^r\right)^n$, laquelle se réduit à $\frac{(b + x\,(a + c\,x^r))^n}{x^n}$, & l'on aura, comme l'on sait, $(b + x\,(a + c\,x^r))^n =$

$$b^n + n\,b^{n-1}\,x\,(a + c\,x^r) + \frac{n\,(n-1)}{2}\,b^{n-2}\,x^2(a + cx^r)^2 + \&c.$$

d'où il est facile de voir que le coéfficient d'une puissance quelconque x^s sera

$$\frac{n\,(n-1)\ldots\ldots n-s+1}{2\cdot 3\ldots\ldots\ldots s}\,b^{n-s}\,a^s$$

$$+\frac{n\,(n-1)\ldots n-s+r}{2\cdot 3\ldots\ldots s-r}\cdot\frac{s-}{1}\,b^{n-s+r}\,a^{s-r}\,c$$

$$+\frac{n\,(n-1)\ldots n-s+2r}{2\cdot 3\ldots s-2r}\cdot\frac{(s-2r)\,(s-2r-1)}{1\cdot 2}\,b^{n-s+2r}\,a^{s-2r}\,c^2$$

$+$ &c.

cette série étant continuée jusqu'à ce que l'on parvienne à des termes négatifs, donc ce coéfficient sera celui de la puissance x^{s-n} dans la quantité $\left(a + \frac{b}{x} + c\,x^r\right)^n$; donc si on désigne en général par (μ) le coéfficient de la puissance x^μ de cette derniere quantité, on aura

$$(\mu) = \frac{n\,(n-1)\ldots\ldots 1-\mu}{2\cdot 3\ldots\ldots\mu+n}\cdot b^{-\mu}\,a^{\mu+n}$$

$$+\frac{n\,(n-1)\ldots\ldots r-\mu}{2\cdot 3\ldots\mu+n-r-1}\,b^{r-\mu}\,a^{\mu+n-r}\,c$$

$$+\frac{n\,(n-1)\,.\,.\,.\,.\,.\,2r-\mu}{2\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,\mu+n-2r-2}\,b^{2r-\mu}\,a^{\mu+\alpha-2r}\,c^{\beta}$$

+ &c.

où il faudra toujours omettre les termes qui contiendroient des puiſſances négatives de a, ou b.

Donc, puiſque pour n obſervations la ſomme de tous les cas eſt $(a+b+c)^n$, on aura pour la probabilité que l'erreur moyenne ſoit $\frac{\mu}{n}$ la quantité $\frac{(\mu)}{(a+b+c)^n}$; & de là la probabilité que l'erreur moyenne ſera renfermée entre ces limites $-\frac{p}{n}$, $+\frac{q}{n}$ ſera exprimée par la ſérie

$$\frac{(-p+1)+\text{\&c.}+(-1)+(0)+(1)+\text{\&c.}+(q-1)}{(a+b+c)^n}$$

Problême IV.

14. Suppoſant tout, comme dans le problême précédent, on demande quelle eſt l'erreur moyenne pour laquelle la probabilité eſt la plus grande.

Nous avons vu que la probabilité que l'erreur moyenne ſoit $\frac{\mu}{n}$ eſt $=\frac{(\mu)}{(a+b+c)^n}$, (μ) étant le coéfficient de la puiſſance x^{μ} du trinome $\left(a+\frac{b}{x}+cx^r\right)^n$; ainſi il ne s'agit que de ſavoir quel eſt le terme de la puiſſance n^{eme} de $a+\frac{b}{x}+cx^r$ qui aura le plus grand coéfficient; pour cela il eſt clair qu'il n'y a qu'à chercher le plus grand terme du trinome $a+b+c$ élevé à la puiſſance n; car ſuppoſant que ce terme ſoit $\pi a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma}$, α, β, γ étant les expoſans de a, b, c dont la ſomme doit être égale à n, & π le coefficient de ce terme, il n'y aura qu'

qu' à mettre $\frac{b}{x}$ à la place de b, & cx^r à la place de c, & l' on aura $\pi a^\alpha b^\beta c^\gamma x^{-\beta+r\gamma}$ pour le terme cherché de la puiſſance $n^{ème}$ du trinome $a + \frac{b}{x} + cx^r$; ainſi on fera $-\beta + r\gamma = \mu$, & l' on aura $\frac{r\gamma - \beta}{n}$ pour l' erreur moyenne dont la probabilité ſera la plus grande.

Or, par les règles des combinaiſons, on ſait que le coefficient π du terme $\pi a^\alpha b^\beta c^\gamma$, doit être

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \alpha \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \beta \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \gamma}$$

dénotons ce terme par M enſorte que l' on ait

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n\, a^\alpha b^\beta c^\gamma}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \alpha \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \beta \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \gamma} = M$$

& il faudra qu' en faiſant varier les expoſans α, β, γ, la valeur de M diminue; faiſons donc varier α d' une unité, enſorte que α devienne $\alpha + 1$, & comme $\alpha + \beta + \gamma = n$, il faudra que β, ou γ diminue en même tems d' une unité; or il eſt facile de voir que ſi dans la valeur de M on met $\alpha + 1$ pour α, & $\beta - 1$ pour β, cette valeur deviendra $\frac{\beta}{\alpha + 1} X \frac{aM}{b}$, donc $\frac{\beta}{\alpha + 1} X \frac{aM}{b} < M$

& par conſéquent $\frac{\beta}{\alpha + 1} X \frac{a}{b} < 1$;

réciproquement, ſi on augmente β d' une unité, & qu' on diminue α auſſi d' une unité, on trouvera la condition $\frac{\alpha}{\beta + 1} X \frac{b}{a} < 1$; ainſi il faudra que l'on ait en même tems $\frac{\alpha}{\beta + 1} < \frac{a}{b}$ & $\frac{\alpha + 1}{\beta} > \frac{a}{b}$. Or c' eſt ce qui aura lieu ſi $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{a}{b}$;

On trouvera de la même manière $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{a}{c}$; de sorte qu'en prenant un coefficient indéterminé p, on aura dans le cas du *maximum* $\alpha = p\,a$, $\beta = p\,b$, $\gamma = p\,c$; mais $\alpha + \beta + \gamma = n$; donc $p = \frac{n}{a+b+c}$; donc enfin $\alpha = \frac{n\,a}{a+b+c}$, $\beta = \frac{n\,b}{a+b+c}$, $\gamma = \frac{n\,c}{a+b+c}$

Si les quantités $\frac{n\,a}{a+b+c}$, $\frac{n\,b}{a+b+c}$, $\frac{n\,c}{a+b+c}$ sont des nombres entiers, on aura exactement $\alpha = \frac{n\,a}{a+b+c}$, $\beta = \frac{n\,b}{a+b+c}$, $\gamma = \frac{n\,c}{a+b+c}$ comme nous venons de le trouver; mais si ces quantités ne sont pas des nombres entiers, alors il faudra prendre pour α, β, γ les nombres entiers qui en seront les plus proches; on peut prendre cependant, pour plus de simplicité, ces mêmes quantités pour les valeurs de α, β, γ, car l'erreur, s'il y en a, ne pourra jamais être que très-petite; de cette manière nous aurons pour l'erreur moyenne qui a la plus grande probabilité l'expression $\frac{r\gamma - \beta}{n} = \frac{rc - b}{a+b+c}$.

Corollaire.

15. De là il s'ensuit qu'on peut toujours regarder la quantité $\frac{rc-b}{a+b+c}$ comme l'erreur du résultat moyen, & qu'ainsi on peut prendre la même quantité pour la correction de ce résultat.

Lorsque $r = 1$, & $c = b$, comme dans l'hypothèse du prob. 1, la correction du résultat moyen devient nulle; elle le seroit aussi si l'on avoit $b = rc$; mais dans tous

les autres cas elle sera d'autant plus grande que rc différera davantage de b.

Problème V.

16. On suppose que chaque observation soit sujette à des erreurs quelconques données, & qu'on connoisse en même tems le nombre des cas, où chaque erreur peut avoir lieu; on demande la correction qu'il faudra faire au résultat moyen de plusieurs observations.

Soient p, q, r, s &c. les erreurs auxquelles chaque observation est sujette, & a, b, c, d &c. les cas qui peuvent donner ces erreurs, savoir a le nombre des cas qui donneroient l'erreur p, b le nombre des cas qui donneroient l'erreur q, & ainsi des autres; il est clair, par ce que nous avons demontré dans les problêmes précédens, que si on élève le polinome $ax^p + bx^q + cx^r +$ &c. à la puissance n, & qu'on dénote par M le coefficient de la puissance x^μ, on aura $\frac{M}{(a+b+c+\text{&c.})^n}$ pour la probabilité que l'erreur du résultat moyen de n observations soit $\frac{\mu}{n}$. Or on sait par la théorie des combinaisons que le coefficient M sera de cette forme

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n \, a^\alpha b^\beta c^\gamma \cdots}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \alpha \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \; 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \gamma \cdots}$$

où les exposans α, β, γ &c. doivent être tels que $\alpha + \beta + \gamma +$ &c. $= n$, & $\alpha p + \beta q + \gamma r +$ &c. $= \mu$ De plus, il est facile de démontrer, par une méthode semblable à celle du problême précédent, que le coéfficient M sera le plus grand lorsque on aura

$$\alpha = \frac{n\,a}{a+b+c+\text{&c.}}$$

$$\beta = \frac{n\,b}{a+b+c+\text{&c.}}$$

$$\gamma = \frac{n\,c}{a+b+c+\text{&c.}}$$

d' où il s' enſuit, que l' erreur moyenne, pour laquelle la probabilité ſera la plus grande, ſera exprimée par $\frac{\mu}{n} = \frac{a\,p + b\,q + c\,r + \&c.}{a + b + c + \&c.}$

Ainſi cette quantité repréſentera la correction qu'il faudra faire au réſultat moyen de pluſieurs obſervations.

Corollaire I.

17. Si on regarde les quantités a, b, c &c. comme des poids appliqués à une droite indéfinie, à des diſtances égales à p, q, r &c. d' un point fixe pris dans cette droite, & qu' on cherche le centre de gravité de ces poids, la diſtance de ce centre au point fixe ſera la correction qu' il faudra faire au réſultat moyen de pluſieurs obſervations; cela ſuit évidemment de la formule que nous avons trouvée plus haut pour la valeur de cette correction.

Corollaire II.

18. Donc, ſi on ſuppoſe que chaque obſervation ſoit ſujette à toutes les erreurs poſſibles, qui peuvent être compriſes entre des limites données, & qu' on connoiſſe la courbe de la facilité des erreurs, dans laquelle les abſciſſes étant ſuppoſées repréſenter les erreurs, les ordonnées répreſentent les facilités de ces erreurs, il n' y aura qu' à chercher le centre de gravité de l' aire totale de cette courbe, & l' abſciſſe répondante à ce centre exprimera la correction du réſultat moyen. De là on voit que ſi la courbe, dont il s'agit, eſt égale, eſt ſemblable de côté & d' autre de l' ordonnée qui paſſe par l' origine des abſciſſes, enſorte que cette ordonnée ſoit un diamêtre de la courbe dont il s' agit, alors la correction ſera nulle, le centre de gravité tombant néceſſairement dans le diamêtre.

Ce cas a lieu toutes les fois que les erreurs peuvent être également positives & négatives.

Problème VI.

19. Je suppose qu'on ait vérifié un instrument quelconque, & qu'ayant réitéré plusieurs fois la même vérification on ait trouvé différentes erreurs, dont chacune se trouve répétée un certain nombre de fois; on demande quelle est l'erreur qu'il faudra prendre pour la correction de l'instrument.

Soient p, q, r &c. les erreurs trouvées, & soient α, β, γ &c. les nombres qui marquent combien de fois chaque erreur s'est trouvée répétée en faisant n vérifications; supposons que le nombre des cas qui peuvent donner l'erreur p, ou q, ou r &c. soit désigné respectivement par a, b, c &c.; qu'on élève le polinome $a x^p + b x^q + c x^r +$ &c. à la puissance n, & soit $N (a x^p)^\alpha (b x^q)^\beta (c x^r)^\gamma \ldots$ un terme quelconque de ce polinome, le coefficient $N a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$ de la puissance $p\alpha + q\beta + r\gamma +$ &c. de x divisé par $(a + b + c +$ &c.$)^n$ dénotera la probabilité que les erreurs p, q, r &c. se trouvent combinées ensemble, de manière que p soit répété α fois, q β fois, r γ fois, & ainsi des autres. Ainsi cette probabilité sera la plus grande dans la combinaison où la valeur de $N a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$ &c. sera la plus grande;

mais on a $N = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \alpha \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \beta \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \gamma \ldots}$

comme nous l'avons déja vu dans le problême précédent; donc, par le même problême, la plus grande valeur de $N a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$ aura lieu lorsque

$$\alpha = \frac{n a}{a + b + c + \&c.}$$

$$\beta = \frac{n b}{a + b + c + \&c.}$$

$$\gamma = \frac{n c}{a + b + c + \&c.}$$

équations par lesquelles on pourra déterminer les inconnues a, b, c &c. ; & l' on aura, en faisant $a + b + c +$ &c. $= s$, $a = \frac{s\,\alpha}{n}$, $b = \frac{s\,\beta}{n}$, $c = \frac{s\,\gamma}{n}$ &c.

Or nous avons démontré dans le problême cité, que la correction qu' il faut faire au résultat moyen d' un nombre quelconque d'observations est exprimée par $\frac{ap + bq + cr + \&c.}{a + b + c + \&c.}$ donc, mettant dans cette expression les valeurs de a, b, c &c. que nous venons de trouver, la correction, dont il s' agit, deviendra

$$\frac{\alpha\, p + \beta\, q + \gamma\, r + \&c.}{n}$$

c' est-à-dire, égale à l' erreur moyenne entre toutes les erreurs particulières que les n vérifications ont données.

Corollaire.

2o. Si on vouloit tenir compte aussi, au moins d' une manière approchée, des erreurs intermédiaires auxquelles l' instrument pourroit être sujet, il n' y auroit qu' à prendre, dans une ligne droite indéfinie, des abscisses proportionelles aux erreurs trouvées p, q, r &c. comme dans l' art. 17., & y ayant appliqué des ordonnées proportionelles aux quantités a, b, c &c. on feroit passer par les extrémités p, q, r &c. une ligne parabolique ; on chercheroit ensuite le centre de gravité de l' aire de toute la courbe, & la perpendiculaire, abaissée de ce centre sur l' axe, y couperoit une abscisse qui seroit la correction de l' instrument.

On voit par là comment on peut connoître *a posteriori* la loi de la facilité de chacune des erreurs auxquelles un instrument peut-être sujet.

Rémarque I.

21. On a trouvé ci-deſſus que la plus grande probabilité a lieu lorſque $a = \frac{s\alpha}{n}$, $b = \frac{s\beta}{n}$, $c = \frac{s\gamma}{n}$ &c. de ſorte que les valeurs de a, b, c &c. ſont les plus probables qu'on puiſſe ſuppoſer ; ſi on vouloit ſavoir de plus quelle eſt la probabilité que ces mêmes valeurs ne s'ecarteront pas de la vérité d'une quantité quelconque $\pm \frac{r}{n}s$, il n'y auroit qu'à mettre dans l'expreſſion générale de la probabilité $\frac{N a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots}{s^n}$ (prob. préc.) au lieu de a, b, c &c. les quantités $\frac{s(\alpha + x)}{n}$, $\frac{s(\beta + y)}{n}$, $\frac{s(\gamma + z)}{n}$ &c. & faiſant ſucceſſivement x, y, z &c. $= +1, +2, +3$ &c. $\pm r$, enſorte, cependant, que l'on ait toujours $x + y + z +$ &c. $= o$, à cauſe que $a + b + c +$ &c. $= s$ & $\alpha + \beta + \gamma +$ &c. $= n$ (hyp.) on aura autant de probabilités particulières, dont la ſomme ſera la probabilité cherchée.

Soit P la probabilité que l'on ait $a = \frac{s\alpha}{n}$, $b = \frac{s\beta}{n}$, $c = \frac{s\gamma}{n}$ &c. mettant ces valeurs dans l'expreſſion précédente on aura

$$P = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}{n^n} \times \frac{\alpha^{\alpha}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \alpha} \times \frac{\beta^{\beta}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \beta} \times \ldots$$

Soit de plus Q la probabilité que l'on ait $a = \frac{s(\alpha + x)}{n}$, $b = \frac{s(\beta + y)}{n}$ &c. on aura la valeur de Q en mettant ces valeurs dans la même expreſſion, & il eſt facile de voir qu'on aura

$$Q = P \cdot \left(1 + \frac{x}{\alpha}\right)^{\alpha} \left(1 + \frac{y}{\beta}\right)^{\beta} \left(1 + \frac{z}{\gamma}\right)^{\gamma} \ldots\ldots$$

Donc, si on fait en général

$$V = \left(1 + \frac{x}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(1 + \frac{y}{\beta}\right)^{\beta}\left(1 + \frac{z}{\gamma}\right)^{\gamma}\ldots.$$

& que $\int v$ dénote la somme de toutes les valeurs particulières de v, en faisant varier x, y, z &c. depuis o jusqu' à $+ r$, & ayant soin que l' on ait toujours $x + y + z +$ &c. $= o$, la probabilité cherchée sera égale à $P \int v$.

Comme il n' est pas facile de trouver l' intégrale $\int v$, surtout lorsqu' il y a plus de deux variables, on pourra se contenter de l' avoir d' une manière approchée; pour cela il n' y aura qu' à prendre une valeur moyenne de v & la multiplier par le nombre de toutes les valeurs particulières de v qui doivent entrer dans l'intégrale $\int v$; & la difficulté ne consistera qu' à trouver ce nombre. Or si on désigne par m le nombre des quantités α, β, γ &c. il est facile de concevoir que le nombre, dont-il s' agit, ne sera autre chose que le coefficient de u^{o}, c' est-à-dire, le terme tout connu de la série qui représente la puissance m du polinome $u^{-r} + u^{-r+1} +$ &c. $+ u^{-1} + 1 + u +$ &c. $+ u^{r-1} + u^{r}$. Qu' on dénote ce terme par T, & l' on aura, comme nous le démontrerons plus bas

$$T = \frac{(mr+1)(mr+2)(mr+3)\ldots\ldots(mr+m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots\ldots m-1}$$

$$- m\frac{((m-2)r)((m-2)r+1)((m-2)r+2)\ldots.((m-2)r+m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots m-1}$$

$$+ \frac{m(m-1)((m-4)r-1)((m-4)r)((m-4)r+1)\ldots\ldots((m-4)r+m-3)}{2 \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots\ldots m-1}$$

— &c.

en continuant cette série, seulement jusqu' à ce que quelqu' un des facteurs $mr+1$, $(m-2)r$, $(m-4)r-1$ &c. devienne négatif.

Donc

Donc, si W est la valeur moyenne de V, on aura, pour la valeur approchée de $\int v$, la quantité $T\,W$; & la probabilité cherchée sera à peu près égale à $P\,T\,W$

Si, au lieu de prendre pour W la valeur moyenne de V, on prend la plus petite, il est clair que $T\,W$ sera nécessairement moindre que la véritable valeur de $\int v$; & par conséquent la probabilité cherchée sera nécessairement plus grande que $P\,T\,W$; ainsi on pourra parier avec avantage $P\,T\,W$ contre $1 - P\,T\,W$ qu'en faisant $\frac{a}{s} = \frac{\alpha}{n}$, $\frac{b}{s} = \frac{\beta}{n}$, $\frac{c}{s} = \frac{\gamma}{n}$ &c. on ne se trompera pas d'une quantité plus grande que $\frac{r}{n}$ tant en plus qu'en moins.

Remarque II.

22. Supposons que n soit un nombre très-grand, & que, par conséquent, les nombres α, β, γ &c. dont la somme est $= n$ soient aussi très grands; pour trouver dans ce cas les valeurs de P & de V on remarquera 1.° que lorsque x est un très-grand nombre on a, à très-peu près,

$$l\,1 + l\,2 + l\,3 + \&c. + l\,u = \frac{1}{2}\,l\,\pi + \left(u + \frac{1}{2}\right) l\,u - u$$

π étant le rapport de la périphérie du cercle au rayon; d'où il suit que l'on aura

$$l\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots u}{u^u} = \frac{1}{2}\,l\,\pi + \frac{1}{2}\,l\,u - u,$$

& par conséquent

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots u}{u^u} = \frac{\sqrt{(\pi u)}}{\epsilon^u}$$

donc, à cause de $\alpha + \beta + \gamma + \&c. = n$, on aura

$$P = \sqrt{\left(\frac{\pi^n}{(\pi\alpha)\,(\pi\beta)\,(\pi\gamma)\ldots}\right)}$$

2.° Si on prend le logarithme de V on aura

$$lV = \alpha l\left(1 + \frac{x}{\alpha}\right) + \beta l\left(1 + \frac{y}{\beta}\right) + \gamma l\left(1 + \frac{z}{\gamma}\right) + \&c.$$

mais $l\left(1 + \frac{x}{\alpha}\right) = \frac{x}{\alpha} - \frac{x^2}{2\alpha^2} + \&c.$

donc, à cauſe de $x + y + z + \&c. = o$, on aura, à très peu près,

$$lV = -\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} + \frac{z^2}{\gamma} + \&c.\right)$$

& de là

$$V = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} + \frac{z^2}{\gamma} + \&c.\right)}.$$

Soit maintenant $x = \xi\sqrt{n}$, $y = \Psi\sqrt{n}$ $z = \zeta\sqrt{n}$ &c., & $\frac{\alpha}{n} = A$, $\frac{\beta}{n} = B$, $\frac{\gamma}{n} = C$ &c. on aura $\xi + \Psi + \zeta + \&c. = o$ & $A + B + C + \&c. = 1$; donc,

$$P = \frac{1}{\left(\pi n\right)^{\frac{m-1}{2}}\sqrt{\left(ABC\ldots\right)}} \&$$

$$V = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi^2}{A} + \frac{\Psi^2}{B} + \frac{\zeta^2}{C} + \&c.\right)}$$

Or, comme l'incrément où la différence des quantités x, y, z &c. eſt $= 1$, la différence des variables ξ, Ψ, ζ &c. ſera $= \frac{1}{\sqrt{n}}$ &, par conſéquent, infiniment petite; de ſorte que, ſi on appelle cette différence $d\theta$, on aura

$$P = \frac{d\theta^{m-1}}{\sqrt{\left(\pi^{m-1} ABC\ldots\right)}}$$

Donc $-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi^2}{A} + \frac{\Psi^2}{B} + \frac{\zeta^2}{C} + \&c.\right)$

$$Pv = \frac{e \quad d\theta^{m-1}}{\sqrt{\left(\pi^{m-1} A.A.C\ldots\right)}}$$

Donc, si on intègre la différentielle

$$e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi^2}{A}+\frac{\Psi^2}{B}+\frac{\zeta^2}{C}+\&c.\right)} d\theta^{m-1}$$

$m-1$ fois, en mettant d'abord à la place de ξ sa valeur $-\Psi-\zeta-$ &c. & faisant varier ensuite successivement les variables Ψ, ζ &c. de la même différentielle $d\theta$, & qu'on complette l'intégrale, ensorte que les valeurs de ξ, Ψ, ζ &c. s'étendent depuis $-\rho$ jusqu'à ρ (en faisant $r=\rho\sqrt{n}$) on aura, en nommant cette intégrale R, la quantité

$$\frac{R}{\sqrt{(\pi^{m-1}ABC\ldots)}}$$

pour la probabilité que les valeurs de a, b, c &c. seront exactes à $\frac{\rho s}{\sqrt{n}}$ prés.

Soit par exemple $m=2$, ensorte que l'on n'ait trouvé que deux erreurs différentes, dont l'une ait été répétée α fois, & l'autre β fois dans un nombre très-grand n de vérifications de l'instrument; en ce cas il n'y aura qu'une seule intégration à faire, & la différentielle à intégrer sera, en mettant $-\Psi$ à la place de ξ, & faisant $d\theta=dx$,

$$e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right)\Psi^2} dx$$

laquelle n'est intégrable par aucune des méthodes connues, à moins qu'on ne réduise en série la quantité exponentielle $e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right)\Psi^2}$. De cette manière on aura la différentielle

$$d\Psi\left(1-K\Psi^2+\frac{K^2\Psi^4}{2}-\frac{K^3\Psi^6}{2\cdot 3}+\&c.\right)$$

en faisant, pour abréger, $K=\frac{A+B}{2AB}$;

de sorte que l'intégrale sera

$$\Psi - \frac{K\Psi^3}{3} + \frac{K^2\Psi^5}{2\cdot 5} - \frac{K^3\Psi^7}{2\cdot 3\cdot 7} + \&c.$$

Donc

$$R = 2\left(\rho - \frac{K\rho^3}{3} + \frac{K^2\rho^5}{2\cdot 5} - \frac{K^3\rho^7}{2\cdot 3\cdot 7} + \&c.\right)$$

Donc $\frac{R}{\sqrt{(\pi A B)}}$ exprimera la probabilité que les valeurs de a, & b soient renfermées entre ces limites $s\left(A \pm \frac{\rho}{\sqrt{n}}\right)$ & $s\left(B \pm \frac{\rho}{\sqrt{n}}\right)$, c'est-à-dire, que les facilités des erreurs qui se sont trouvées répétées α, & β fois, lesquelles sont proportionelles à $\frac{a}{s}$, & $\frac{b}{s}$, ne s'écartent pas des quantités A, & B données par les observations, d'une quantité plus grande que $\frac{\rho}{\sqrt{n}}$.

Si on fait, pour plus de simplicité, $\rho = \mu\sqrt{AB}$, on aura, à cause de $A + B = 1$, $K = \frac{\mu^2}{2\rho^2}$, & la probabilité, dont il s'agit, sera exprimée de cette manière

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\mu - \frac{\mu^3}{2\cdot 3} + \frac{\mu^5}{2.4.5} - \frac{\mu^7}{2.4.6.7} + \&c.\right)$$

Donc, si on suppose $\mu = 1$, on aura la série $1 - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.4.5} - \&c.$ dont la somme est à très-peu-près $0,855624$; de sorte que la probabilité cherchée sera $\frac{1,611248}{\sqrt{\pi}} = 0,682688$ à peu près.

Ainsi on pourra, dans ce cas, parier avec avantage que, en supposant les facilités des erreurs respectivement égales à A & B, on ne se trompera pas de la quantité $\mu\sqrt{\left(\frac{AB}{n}\right)}$ qui, à cause de n très-grand, est nécessairement infiniment petite.

Il ſeroit beaucoup plus difficile de trouver la valeur de R ſi les variables ξ, Ψ, ζ &c. étoient plus de deux, ſurtout à cauſe que l'intégration doit être telle, qu'elle n'embraſſe que les valeurs de ces mêmes variables qui ſont compriſes entre les limites $-\rho$ & $+\rho$; mais on pourra, dans ces cas, ſe ſervir de l'approximation que nous avons donnée dans l'art. préc.

Pour cela on remarquera, que puiſque nous avons fait $r = \rho\sqrt{n}$, & que n eſt ſuppoſé fort grand, le nombre r devra être fort grand auſſi; de ſorte qu'on aura, à très-peu-près,

$$T = \frac{r^{m-1}}{1.2.3\ldots m-1}\left(m^{m-1} - m\,(m-2)^{m-1} + \frac{m\,(m-1)}{2}\,(m-4)^{m-1} - \&c.\right)$$

en continuant cette ſérie juſqu'à ce que quelqu'un des nombres $m-2$, $m-4$ &c. devienne négatif; donc on aura

$$PT = \left(\frac{\rho}{\sqrt{\pi}}\right)^{m-1} \times \frac{m^{m-1} - m(m-2)^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2}(m-4)^{m-1} - \&c.}{1.2.3\ldots m-1.\sqrt{(ABC\ldots)}}$$

& il n'y aura plus qu'à multiplier cette quantité par W, c'eſt-à-dire, par la valeur moyenne, ou, ſi l'on veut, par la plus petite valeur de V. Or, comme on a

$$V = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}\left(\frac{\xi^2}{A} + \frac{\Psi^2}{B} + \frac{\zeta^2}{C} + \&c.\right)}}$$

il eſt clair que la plus petite valeur de V ſera celle où la quantité $\frac{\xi^2}{A} + \frac{\Psi^2}{B} + \frac{\zeta^2}{C} + \&c.$ ſera la plus grande; & il eſt facile de voir que cela arrivera en prenant $\xi = \rho$ $\Psi = -\rho$, $\zeta = o$ &c. à cauſe de $\xi + \Psi + \zeta = o$, & ſuppoſant que A, & B ſoient les plus petites de toutes les quantités A, B, C &c. ainſi on aura $W = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right)\rho^2}}$

Donc, faisant, pour abréger,

$$M = \frac{m^{m-1} - m\,(m-2)^{m-1} + \frac{m\,(m-1)}{2}\,(m-4)^{m-1} - \&c.}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m - 1}$$

on aura la quantité

$$M \left(\frac{\rho}{\sqrt{\pi}}\right)^{m-1} \int \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right)\rho^2}}{\sqrt{(A\,B\,C\ldots)}}$$

laquelle sera nécessairement moindre que la probabilité cherchée ; de sorte qu'en nommant H cette quantité, on pourra toujours parier avec avantage H contre $1 - H$ qu'en supposant les facilités des erreurs égales, respectivement à A, B, C &c. on ne se trompera pas de la quantité très petite $\frac{\rho}{\sqrt{n}}$.

Lemme I.

23. Soit X une fonction rationelle & sans diviseur de x, on demande le coefficient de la puissance x^μ dans la série résultante du développement de la fraction $\frac{X}{(a-x)^n}$.

On a, comme l'on sait,

$$\frac{1}{(a-x)^n} = \frac{1}{a^n} + \frac{n\,x}{a^{n+1}} + \frac{n\,(n+1)\,x^2}{2\,a^{n+2}} + \&c.$$

$$= \frac{\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n-1}{a^n} + \frac{2 \cdot 3 \ldots n\,x}{a^{n+1}} + \frac{3 \cdot 4 \ldots n+1 \cdot x^2}{a^{n+2}} + \&c.}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n - 1};$$

donc, si on ordonne la quantité X par rapport aux puissances de x, en commençant par la plus haute, de manière que l'on ait en général $X = Ax^\alpha + Bx^{\alpha-1} + Cx^{\alpha-2} + \&c. + Mx^\mu + Nx^{\mu-1} + \&c.$

& qu'on multiplie cette série par celle qui exprime la valeur de $\frac{1}{(a-x)^n}$, il est facile de voir que le terme qui contiendra la puissance x^μ sera

$$\frac{\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots n-1}{a^n}M+\frac{2\cdot 3\ldots n}{a^{n+1}}N+\frac{3\cdot 4\ldots n+1}{a^{n+2}}P+\&c.}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n-1}x^\mu$$

de sorte que le coefficient cherché sera représenté par la série

$$\frac{\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots n-1}{a^n}M+\frac{2\cdot 3\ldots n}{a^{n+1}}N+\frac{3\cdot 4\ldots n+1}{a^{n+2}}P+\&c.}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n-1}$$

Dénotons par X' la somme de tous les termes de la valeur de X où les puissances de x ne sont pas plus hautes que x^μ, ensorte que l'on ait $X'=Mx^\mu+Nx^{\mu-1}+Px^{\mu-2}+\&c.$; & divisant par $x^{\mu+1}$ on aura

$$\frac{X'}{x^{\mu+1}}=\frac{M}{x}+\frac{N}{x^2}+\frac{P}{x^3}+\&c.$$

donc, différentiant $n-1$ fois, & faisant ensuite $x=a$, on aura

$$\pm\frac{d^{n-1}\left(\frac{X'}{\mu+1}\right)}{dx^{n-1}}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots n-1}{a^n}M+\frac{2\cdot 3\ldots n}{a^{n+1}}N+\&c.$$

le signe supérieur étant pour le cas où n est impair, & l'inférieur pour celui où n est pair.

Donc, le coefficient cherché de la puissance x^μ sera égal à ce que devient la quantité $\frac{d^{n-1}\left(\frac{X'}{x^{\mu+1}}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n-1\,(-dx)^{n-1}}$ lorsqu'on y fait $x=a$.

Remarque.

24. Si on divise la quantité X par $x^{\mu+1}$, & qu'on en rejette ensuite tous les termes où il y aura des puissances positives de x, il est visible qu'on aura la valeur de $\frac{X'}{x^{\mu+1}}$; donc, à la place de la quantité X' on peut prendre la quantité même X, en ayant soin de rejetter les termes dont nous venons de parler; de cette manière on aura, pour l'expression du coefficient cherché de x^{μ}, la quantité $\frac{d^{n-1}\left(\frac{X}{x^{\mu+1}}\right)}{1.2.3...n-1(-dx)^{n-1}}$ en réjettant dans cette quantité, avant, ou après les différentiations, toutes les puissances positives de x, & faisant ensuite $x = a$.

Corollaire I.

25. Supposons qu'on demande le coefficient de x^{μ} dans la série $x^{-\alpha} \ldots\ldots + x^{-2} + x^{-1} + x^{0} + x^{1} + x^{2} + \ldots\ldots x^{\beta}$ élevée à la puissance n.

Suivant les règles ordinaires de la sommation des progressions géometriques on trouve que la somme de cette série est représentée par

$$\frac{x^{-\alpha}\left(1-x^{\alpha+\beta+1}\right)}{1-x}$$

de sorte que la puissance n^{eme} de la même série sera égale à

$$\frac{x^{n\alpha}\left(1-x^{\alpha+\beta+1}\right)^{n}}{(1-x)^{n}}.$$

Comparant donc cette formule avec celle du problême précédent, on aura

$$X = x^{-n\alpha}\left(1-x^{\alpha+\beta+1}\right)^{n} =$$

$$x^{-n\alpha} - n\,x^{-(n-1)\alpha+\beta+1} + \frac{n(n-1)}{2}\,x^{-(n-2)\alpha+2(\beta+1)}$$

$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}\,x^{-(n-3)\alpha+3(\beta+1)} + \&c.$$

donc

donc, divisant par $x^{\mu+1}$ & faisant pour abréger $n\alpha + \mu = \pi$, $\alpha + \beta + 1 = \rho$ on aura

$$\frac{X}{x^{\mu+1}} = x^{-(\pi+1)} - n\,x^{-(\pi+1-\rho)} + \frac{n(n-1)}{2}\,x^{-(\pi+1-2\rho)}$$

$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}\,x^{-(\pi+1-3\rho)} + \&c.$$

& par conséquent en différentiant $n-1$ fois,

$$\frac{d^{n-1}\left(\frac{X}{x^{\mu+1}}\right)}{(-dx)^{n-1}} = (\pi+1)(\pi+2)\ldots(\pi+n-1)\,x^{-(\pi+n)}$$

$$- n(\pi+1-\rho)(\pi+2-\rho)\ldots\ldots(\pi+n-1-\rho)\,x^{-(\pi+n-\rho)}$$

$$+ \frac{n(n-1)}{2}(\pi+1-2\rho)(\pi+2-2\rho)\ldots\ldots(\pi+n-1-2\rho)\,x^{-(\pi+n-2\rho)}$$

$$- \&c.$$

On rejettera donc de cette série les termes où les exposans de x se trouveront positifs, c' est-à-dire, que si s est le nombre entier, qui est égal ou immédiatement plus grand que $\frac{\pi+n}{\rho}$, on continuera la série seulement jusqu' au terme s^{eme}; ou bien il suffira de la continuer jusqu' à ce que quelqu'un des premiers facteurs $\pi+1$, $\pi+1-\rho$ &c. devienne négatif; ensuite on fera $x = 1$ & on divisera le tout par $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$; on aura ainsi la valeur du coefficient cherché, la quelle sera par conséquent

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n-1}\Big((\pi+1)(\pi+2)\ldots\ldots(\pi+n-1)$$

$$- n(\pi+1-\rho)(\pi+2-\rho)\ldots\ldots(\pi+n-1-\rho)$$

$$+ \frac{n(n-1)}{2}(\pi+1-2\rho)(\pi+2-2\rho)\ldots\ldots(\pi+n-1-2\rho)$$

$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}(\pi+1-3\rho)(\pi+2-3\rho)\ldots\ldots(\pi+n-1-3\rho)$$

$$+ \&c.\Big)$$

De là on tire la solution du problème suivant.

Problême VII.

26. On a plusieurs observations dans chacune desquelles on suppose qu'on ait pu se tromper également d'une quelconque de ces quantités $-\alpha, \ldots\ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\ldots \beta$; on demande quelle est la probabilité que l'erreur du résultat moyen de n observations sera $\frac{\mu}{n}$, ou qu'elle sera renfermée entre ces limites $-\frac{p}{n}$ & $\frac{+q}{n}$.

Pour trouver la probabilité que le résultat moyen soit $\frac{\mu}{n}$, il faut chercher le coefficient de la puissance x^{μ} du polinome $x^{-\alpha}\ldots\ldots + x^{-2} + x^{-1} + x^{0} + x^{1} + x^{2} + \ldots\ldots x^{\beta}$ élevé à la puissance n, & diviser ensuite ce coefficient par la valeur du même polinome élevé à la puissance n, qui répond à $x = 1$; c'est-à-dire, par $(\alpha + \beta + 1)^n$ c'est ce qui suit évidemment de ce que nous avons démontré dans les prob. préc.

Donc, par le corollaire précédent, on trouvera que la probabilité cherchée sera, en faisant $\pi = n\alpha + \mu, \rho = \alpha + \beta + 1$,

$$\frac{1}{1.2.3..n-1}\frac{1}{\rho^n}\Big((\pi+1)(\pi+2)\ldots\ldots(\pi+n-1)$$
$$-n(\pi+1-\rho)(\pi+2-\rho)\ldots\ldots(\pi+n-1-\rho)$$
$$+\frac{n(n-1)}{2}(\pi+1-2\rho)(\pi+2-2\rho)\ldots(\pi+n-1-2\rho)$$
$$-\ \&c.\Big)$$

en continuant cette série jusqu'à ce que quelqu'un des facteurs $\pi + 1$, $\pi + 1 - \rho$ &c. devienne négatif.

Telle est l'expression générale de la probabilité que l'erreur moyenne de n observations soit $= \frac{\mu}{n}$; ainsi pour avoir la probabilité que l'erreur soit contenue entre les

limites $\frac{-p}{n}$ & $\frac{+q}{n}$ il n'y aura qu'à faire varier μ dans la quantité précédente, & prendre la ſomme de toutes les quantités particulières qui répondront à

$\mu = -p, \ldots\ldots -2, -1, 0, 1, 2 \ldots\ldots q.$

Or, puiſque la quantité μ n'entre que dans la valeur de π, il n'y aura donc que cette quantité de variable; de ſorte que la difficulté ſe réduira à ſommer des ſuites dont le terme général ſera de cette forme $(s+1)\ (s+2)\ (s+3) \ldots\ldots (s+k)$

Pour cela, ſoit la ſomme de cette ſérie repréſentée par

$u\ (s+1)\ (s+2) \ldots\ldots (s+k)$

u étant une fonction inconnue de s, & mettant $s-1$ à la place de s, & u' à la place de u, on aura

$u'\ s\ (s+1)\ (s+2) \ldots\ldots (s+K-1)$

quantité, qui étant retranchée de la précédente, on aura la différence

$(u\ (s+K) - u'\ s)\ (s+1)\ (s+2) \ldots\ldots (s+K-1)$

mais il faut que cette différence ſoit égale au terme général de la ſérie dont on cherche la ſomme, donc on aura l'équation

$u\ (s+K) - u'\ s = s+K$

à laquelle on ſatisfera en faiſant $u = \frac{s+K+1}{K+1}$; de ſorte que la ſomme générale de la ſérie dont le terme général eſt $(s+1)\ (s+2) \ldots\ldots (s+K)$ ſera repréſentée par $\frac{(s+1)\ (s+2) \ldots\ldots (s+K)\ (s+K+1)}{K+1}$

& par conſéquent la ſomme de tous les termes compris entre ces deux-ci

$(s'+1)\ (s'+2) \ldots\ldots (s'+K)$ & $(s''+1)\ (s'+2) \ldots\ldots (s''+K)$

ſera égale à

$$\frac{s''(s''+1)\ (s''+2) \ldots\ldots (s''+K) - (s+1)\ (s'+2) \ldots\ldots (s'+K+1)}{K+1}$$

Appliquant donc ceci à la formule trouvée plus haut, on aura pour la probabilité que l'erreur moyenne tombe entre $\frac{-p}{n}$ & $\frac{q}{n}$ l'expreſſion ſuivante, dans laquelle j'ai fait pour abréger $n\alpha - p = \delta$ & $n\alpha + q = \gamma$,

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n\rho^n}\Big(\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)-(\delta+1)(\delta+2)\ldots(\delta+n)$$
$$-n((\gamma-\rho)(\gamma-\rho+1)\ldots\ldots(\gamma-\rho+n-1)-(\delta-\rho+1)(\delta-\rho+2)\ldots\ldots(\delta-\rho+n))$$
$$+\frac{n(n-1)}{2}((\gamma-2\rho)(\gamma-2\rho+1)\cdots(\gamma-2\rho+n-1)-(\delta-2\rho+1)(\delta-2\rho+2)\ldots(\delta-2\rho+n))$$
$$-\ \&c.\ \Big)$$

Cette ſérie doit être continuée juſqu'à ce que quelqu'un des facteurs $\gamma-\rho$, $\gamma-2\rho$ &c. devienne négatif; & quant aux autres facteurs $\delta-\rho+1$, $\delta-2\rho+1$ &c. ſi quelqu'un d'entr'eux ſe trouve négatif, alors il faudra augmenter le nombre δ d'autant d'unité qu'il faudra pour le rendre poſitif; cela ſuit évidemment de ce que la ſérie, dont la précédente eſt la ſomme, ne doit être continuée que juſqu'à ce que quelqu'un des premiers facteurs $\pi+1-\rho$, $\pi+1-2\rho$ &c. devienne négatif, comme nous l'avons vu dans l'art. préc.

Corollaire.

27. Suppoſons que les nombres α, & β deviennent infinis, auſſi bien que p & q, mais de façon qu'ils aient entr'eux des rapports finis; & ſoit $\frac{\beta}{\alpha} = l$, $\frac{p}{\alpha} = r$, $\frac{q}{\alpha} = s$, enſorte que l'on ait $\beta = \alpha l$, $p = \alpha r$, $q = \alpha s$, l, r, s étant des nombres finis; dans ce cas on aura $\rho = \alpha + \beta = (1+l)\alpha$, $\delta = n\alpha - p = (n-r)\alpha$ $\gamma = n\alpha + q = (n+s)\alpha$; de ſorte qu'en ſubſtituant ces valeurs dans la formule précédente, & négligeant ce qu'on

doit négliger à cauſe de $\alpha = \infty$, on aura celle-ci ou $f = 1 + l$,

$$\frac{1}{1.2.3....nf^n}\left((n+s)^n - n\,(n+s-f)^n + \frac{n(n-1)}{2}(n+s-2f)^n - \&c.\right.$$
$$\left. -(n-r)^n + n(n-r-f)^n - \frac{n(n-1)}{2}(n-r-2f)^n + \&c.\right)$$

chacune de ces deux ſéries devant être continuée ſeulement juſqu'à ce que quelqu'une des quantités $n+s-f$, $n+s-2f$ &c. & $n-r-f$, $n-r-2f$ &c. devienne négative.

Le cas de ce corollaire a lieu lorſqu'on ſuppoſe que chaque obſervation eſt également ſujette à toutes les erreurs poſſibles compriſes entre des limites données ; car ſi on prend la plus grande erreur négative pour l'unité, & qu'on déſigne la plus grande erreur poſitive par l, la formule précédente dénotera la probabilité que l'erreur du réſultat moyen de n obſervation ſoit renfermée entre ces deux limites $-\frac{r}{n}$ & $+\frac{s}{n}$.

Au reſte nous donnerons plus bas une méthode beaucoup plus ſimple pour reſoudre ces ſortes de queſtions.

Problême VIII.

28. Suppoſant que les erreurs qu'on peut commettre dans chaque obſervation ſoient $-\omega .... -2, -1, 0, 1, 2 .... \omega$, & que le nombre des cas qui répondent à chacune de ces erreurs ſoit reſpectivement proportionel à $1, 2, 3 ..... \alpha+1, ...3, 2, 1$. on demande quelle eſt la probabilité que l'erreur du réſultat moyen de m obſervations ſoit compriſe entre les limites $\frac{-p}{m}$ & $\frac{q}{m}$.

Commençons par chercher la probabilité que l'erreur moyenne ſoit $= \frac{\mu}{m}$; cette probabilité ſera égale au coefficient de la puiſſance x^μ du polinome

$$x^{-\omega} + 2x^{-\omega+1}, ... + \omega x^{-1} + (\omega+1)x^0 + \omega x^1 + ... 2x^{\omega-1} + x^\omega$$

élevé à la puiſſance m, ce coefficient étant enſuite diviſé par la valeur du même polinome élevé à la puiſſance n, qui répond à $x = 1$

Or on a $1 + 2x + \ldots (\omega+1)x^{\omega} + \ldots . 2x^{2\omega-1} + x^{2\omega} = (1 + x + \ldots . x^{\omega})^2 = \left(\frac{1 - x^{\omega+1}}{1-x}\right)^2$; donc le polinome dont-il s'agit ſera égal à $x^{-\omega}\left(\frac{1 - x^{\omega+1}}{1-x}\right)^2$, & par conſéquent la puiſſance n de ce polinome ſera repréſentée par

$$\frac{x^{-m\omega}(1 - x^{\omega+1})^{2m}}{(1-x)^{2m}}$$

Cette formule étant comparée à celle de l'art. 23., on aura $n = 2m$, $n\alpha = m\omega$, & $\alpha + \beta + 1 = \omega + 1$; d'où l'on tire $n = 2m$, $\alpha = \frac{m\omega}{n} = \frac{\omega}{2}$, & $\beta = \frac{\omega}{2}$; donc (prob. préc.) la probabilité cherchée ſera

$$\frac{1}{1.2.3 \ldots 2m\rho^{2m}}\Big((\pi+1)(\pi+2)\ldots.(\pi+2m-1) - 2m(\pi+1-\rho)(\pi+2-\rho)\ldots.(\pi+2m-1-\rho) + \frac{2m(2m-1)}{2}(\pi+1-2\rho)(\pi+2-2\rho)\ldots.(\pi+2m-1-2\rho) - \text{\&c.}\Big)$$

en ſuppoſant $\pi = m\omega + \mu$, & $\rho = \omega + 1$ & continuant la ſérie juſqu'à ce que quelqu'un des facteurs $\pi + 1 - \rho$, $\pi + 1 - 2\rho$ &c. devienne négatif.

De là on trouvera, comme dans le probl. précéd., que la probabilité que l'erreur moyenne ſe trouve entre les limites $\frac{-p}{n}$ & $\frac{q}{n}$ ſera exprimée par

$$\frac{1}{1.2.3 \ldots 2m\rho^{2m}}\Big(\gamma(\gamma+1)\ldots.(\gamma+2m-1) - (\delta+1)(\delta+2)\ldots.(\delta+2m) - 2m((\gamma-\rho)(\gamma+1-\rho)\cdots(\gamma+2m-1-\rho) - (\delta+1-\rho)(\delta+2-\rho)\cdots\delta+2m-\rho)) + \frac{2m(2m-1)}{2}((\gamma-2\rho)(\gamma+1-2\rho)\ldots.(\gamma+2m-1-2\rho) - (\delta+1-2\rho)(\delta+2-2\rho)\ldots(\delta+2m-2\rho)) - \text{\&c.}\Big)$$

γ étant $= m\,\omega + q$, & $\delta = m\,\omega - p$. à l'égard de la continuation de ces deux séries il faudra suivre les règles prescrites plus haut (art. 24.)

Corollaire.

31. Supposons maintenant que les nombres ω p, & q deviennent infinis, mais enforte que l'on ait $\frac{p}{\omega} = r, \frac{q}{\omega} = s$, r, & s étant des nombres finis, & la formule précédente deviendra (art. 25.)

$$\frac{(2m+s)^{2m} - 2m\,(2\,(m-1)+s)^{2m} + \frac{2m\,(2m-1)}{2}(2\,(m-2)+s)^{2m} - \&c.}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,\ldots\,.\,2\,m\,.\,2^{2m}}$$

$$\frac{(2m-r)^{2m} - 2m\,(2\,(m-1)-r)^{2m} + \frac{2m\,(2m-1)}{2}(2(m-2)-r)^{2m} - \&c.}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,\ldots\,.\,2\,m\,.\,2^{2m}}$$

ces deux séries étant continuées jusqu'à ce que quelqu'une des quantités qui sont élevées à la puissance $2n$ devienne négative.

Cette formule exprimera donc la probabilité que l'erreur moyenne de n observations soit comprise entre les limites $\frac{-r}{n}$ & $\frac{s}{n}$, dans l'hypothèse que chaque observation soit sujette à toutes les erreurs possibles contenues entre ces deux limites -1 & $+1$, & que la facilité de chaque erreur soit proportionelle à la différence qu'il y a entre cette erreur & la plus grande erreur possible dans le même sens; cette hypothèse est plus conforme à la nature que celle de l'art. 27.; la courbe des erreurs (art. 20.) seroit ici un triangle isocèle quelconque.

Scholie.

32. En général on pourra trouver, à l'aide du lemme précédent, la probabilité que l'erreur moyenne soit égale à une quantité donnée dans l'hypothèse que les erreurs, auxquelles chaque observation est sujette, forment une progression arithmétique ; & que les facilités de ces erreurs forment une progression algèbrique quelconque, dont les différences d'un ordre quelconque deviennent nulles ; car soit

$A x^{-\alpha} + B x^{-\alpha+1} \ldots\ldots + P x^{-1} + Q x^{0} + R x^{1} + \ldots + V x^{\beta}$

le polinome dont les exposans de x représentent les erreurs, & les coefficiens, les facilités de ces erreurs ; qu'on dénote par ΔA, $\Delta.^{2}A$ &c. les différences premières, secondes &c. de la série A, B, C &c. ensorte que $\Delta . A = B - A$, $\Delta.^{2}A = C - 2B + A$, &c., & qu'on dénote de même par $\Delta.V$, $\Delta.^{2}V$ les différences de la série V, X, Y &c. supposée continuée au delà de V, on aura, comme l'on sait, pour la valeur du polinome proposée, la série

$$x^{-\alpha}\left(\frac{A - V x^{\alpha+\beta+1}}{1-x} + x\,\frac{\Delta.A - \Delta V x^{\alpha+\beta+1}}{(1-x)^{2}} + \text{ &c. }\right)$$

Or, si la série A, B, C &c. V, X &c. est telle que ses différences d'un ordre quelconque m par exemple deviennent nulles, on aura $\Delta.^{m}A = o$, & $\Delta.^{m}V = o$ & toutes les différences ultérieures seront aussi zéro ; de sorte que l'expression précédente deviendra finie quand même le polinome proposé contiendroit un nombre infini de termes ; de plus cette expression pourra se réduire à cette forme $\frac{\Xi}{(1-x)^{m}}$, Ξ étant une fonction rationelle & entière de x ; de sorte qu'en élévant cette quantité à une puissance quelconque, on aura toujours une expression qui sera dans le cas de celle du lemme.

Lemme

Lemme II.

33. On demande le coefficient de la puiſſance x^μ dans la ſérie qui réſultera du développement de la fraction $\frac{X}{(a-x)^m(b-x)^n}$, X étant, comme dans le lemme I. une fonction rationelle & ſans diviſeur, de x.

On ſait que la fraction $\frac{1}{(a-x)^m(b-x)^n}$ peut ſe décompoſer en différentes fractions telles que celles-ci

$$\frac{A}{(a-x)^m} + \frac{A'}{(a-x)^{m-1}} + \frac{A''}{(a-x)^{m-2}} + \&c. + \frac{A^{m-1}}{a-x}$$
$$+ \frac{B}{(b-x)^n} + \frac{B'}{(b-x)^{n-1}} + \frac{B''}{(b-x)^{n-2}} + \&c. + \frac{B^{n-1}}{b-x}$$

les coefficiens A, A', A'' &c. étant égaux à ce que deviennent les quantités $\frac{1}{(b-x)^n}$,

$$\frac{d.\frac{1}{(b-x)^n}}{-dx}, \quad \frac{d.^2\frac{1}{(b-x)^n}}{2dx^2} \text{ &c. lorſque } x = a, \text{ & les}$$

coefficiens B, B', B'' &c. étant égaux à ce que deviennent les quantités

$$\frac{1}{(a-x)^m}, \quad \frac{d.\frac{1}{(a-x)^m}}{-dx}, \quad \frac{d.^2\frac{1}{(a-x)^m}}{2dx^2} \text{ &c.}$$

lorſque $x = b$. Donc la fraction propoſée ſe changera dans ces deux ſuites de fractions

$$\frac{AX}{(a-x)^m} + \frac{A'X}{(a-x)^{m-1}} + \&c. + \frac{A^{m-1}X}{a-x}$$
$$+ \frac{BX}{(b-x)^n} + \frac{B'X}{(b-x)^{n-1}} + \&c. + \frac{B^{n-1}X}{b-x}$$

Mais par le lemme premier le coefficient de la puiſſance x^μ dans la ſérie réſultante d'une fraction telle

que $\frac{X}{(a-x)^{m-s}}$ peut s'exprimer par

$$\frac{d.^{m-s-1}\left(\frac{X}{x^{\mu+1}}\right)}{1.2.3..m-s-1\ (-dx)^{m-s-1}};$$ en y faisant après les différentiations, $x = a$;

Donc, en général, la fraction $\frac{A^s X}{(a-x)^{m-s}}$ donnera pour le coefficient de x^μ la quantité

$$\frac{d.^s \frac{1}{(b-x)^n}}{1.2.3...s\ (-dx)^s} \times \frac{d.^{m-s-1}\left(\frac{X}{x^{\mu+1}}\right)}{1.2.3...m-s-1\ (-dx)^{m-s-1}}$$

où il faut faire $x = a$. Donc, puisque $d^{m-1}.yz = y\,d^{m-1}z + (m-1)\,dy\,d^{m-2}z + \frac{(m-1)(m-2)}{2} d^2y\,d^{m-3}z + \&c. + z\,d^{m-1}y$, il est facile de voir que les fractions

$$\frac{AX}{(a-x)^m} + \frac{A'X}{(a-x)^{m-1}} + \&c. + \frac{A^{m-1}X}{a-x},$$

prises toutes ensemble, donneront pour le coefficient de x^μ la quantité

$$\frac{d.^{m-1}\left(\frac{X}{x^{\mu+1}\ (a-x)^n}\right)}{1.2.3...m-1\ (-dx)^{m-1}}$$

x étant fait $= a$.

De même les fractions

$$\frac{BX}{(a-x)^n} + \frac{B'X}{(b-x)^{n-1}} + \&c. + \frac{B^{n-1}X}{b-x}$$

donneront pour le coefficient de x^μ la quantité

$$\frac{d.^{n-1}\left(\frac{X}{x^{\mu+1}\ (a-x)^m}\right)}{1.2.3....n-1\ (-dx)^{n-1}}$$

x étant fait $= b$.

Donc, en réuniſſant ces deux quantités, on aura pour le coefficient de x^{μ} dans la ſérie réſultante de la fraction $\frac{X}{(a-x)^m\,(b-x)^n}$ l'expreſſion

$$\frac{d^{m-1}\left(\frac{X}{x^{\mu+1}\,(b-x)^n}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots m-1\;(-dx)^{m-1}}\ldots(x=a)$$
$$+\frac{d^{n-1}\left(\frac{X}{x^{\mu+1}\,(a-x)^m}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n-1\;(-dx)^{n-1}}\;(x=b)$$

en ayant ſoin de rejetter dans la valeur de $\frac{X}{x^{\mu+1}}$ toutes les puiſſances poſitives de x.

Corollaire.

34. Il eſt facile de conclure de là que ſi on développoit en ſérie la fraction

$$\frac{X}{(a-x)^m\,(b-x)^n\,(c-x)^p\ldots.}$$

on auroit pour le coefficient de x^{μ} l'expreſſion ſuivante

$$\frac{d^{m-1}\left(\frac{X.}{x^{\mu+1}\,(b-x)^n\,(c-x)^p\ldots.}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots m-1\;(-dx)^{m-1}}\;(x=a)$$
$$+\frac{d^{n-1}\left(\frac{X}{x^{\mu+1}\,(a-x)^m\,(c-x)^p\ldots}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n-1\;(-dx)^{n-1}}\;(x=b)$$
$$+\frac{d^{p-1}\left(\frac{X}{x^{\mu+1}\,(a-x)^m\,(b-x)^n\ldots}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots p-1\;(-dx)^{p-1}}\;(x=c)$$
$$+\;\&c.$$

en ne prenant dans la valeur de $\frac{X}{x^{\mu+1}}$ que les puiſſances négatives de x, & rejettant toutes les poſitives.

Remarque.

35. Par le moyen du lemme précédent on pourra donc déterminer aiſément la probabilité que l'erreur moyenne, réſultante de tant d'obſervations qu'on voudra, ſoit nulle ou égale à une quantité donnée, lorſque le polinome (art. 32.)

$A x^{-\alpha} + B x^{-\alpha+1} \ldots + P x^{-1} + Q x^{0} + R x^{1} \ldots + V x^{\beta}$

forme une ſérie recurrente quelconque; car alors la ſomme de cette ſérie pourra s'exprimer, comme l'on ſait, par une fraction rationelle, telle que

$$\frac{\Xi}{(a-x)^{\lambda}\,(b-x)^{\pi}\,(c-x)^{\rho}\ldots}$$

Ξ étant une fonction rationelle & ſans diviſeur, de x; de ſorte qu'en élévant cette quantité à une puiſſance quelconque, on aura toujours une expreſſion qui pourra ſe rapporter à celles du lemme ci-deſſus.

Au reſte l'hypothèſe la plus conforme à la nature eſt celle où l'on ſuppoſe que chaque obſervation ſoit ſujette à toutes les erreurs compriſes entre des limites données, enſorte que le nombre de toutes les erreurs poſſibles ſoit infini, comme dans les art. 27. & 31.; or pour trouver en ce cas la probabilité que l'erreur moyenne d'un nombre quelconque d'obſervations ſoit auſſi renfermée entre des limites données, il n'eſt pas néceſſaire de conſidérer d'abord un nombre fini d'erreurs, & de ſuppoſer enſuite que ce nombre devienne infini, comme nous l'avons pratiqué dans les art. cités; mais on peut y parvenir directement par une méthode beaucoup plus ſimple & plus générale, laquelle eſt fondée ſur le lemme ſuivant.

Lemme III.

36. Si y dénote une fonction quelconque de x telle que $\frac{d^m y}{dx^m}$ soit une quantité constante, on aura

$$\int y\, a^x\, dx = a^x \left(\frac{y}{la} - \frac{dy}{dx\,(la)^2} + \frac{d^2 y}{dx^2\,(la)^3} - \&c. \pm \frac{d^m y}{dx^m\,(la)^{m+1}} \right) + const.$$

c'est ce qui est allé à vérifier par la différentiation.

Corollaire I.

37. Si on fait $y = x^m$, m étant un nombre entier & positif, on aura donc

$$\int x^m a^x\, dx = a^x \left(\frac{x^m}{la} - \frac{m\,x^{m-1}}{(la)^2} + \frac{m\,(m-1)\,x^{m-2}}{(la)^3} - \&c. \pm \frac{m\,(m-1)\,(m-2)\ldots 2\cdot 1}{(la)^{m+1}} \right) + const.$$

Qu'on prenne l'intégrale $\int x^m a^x\, dx$ enforte qu'elle soit nulle lorsque $x = o$, & l'on aura

$$\int x^m a^x\, dx = a^x \left(\frac{x^m}{la} - \frac{m\,x^{m-1}}{(la)^2} + \&c. - \frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots m}{(-la)^{m+1}} \right) + \frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots m}{(-la)^{m+1}}.$$

Or, si on suppose que a soit une fraction moindre que l'unité, enforte que $\frac{1}{a}$ soit un nombre plus grand que l'unité, & qu'on fasse $x = \infty$, il est facile de voir que $\left(\frac{1}{a}\right)^x$ sera une quantité infinie d'un ordre infiniment plus grand que x^m, & qu'aucune puissance finie de x;

donc $\frac{x^m}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}$, ou bien $a^x x^m$ ſera nulle, &, à plus forte raiſon auſſi, toutes les autres quantités $a^x x^{m-1}$, $a^x x^{m-2}$ &c. ſeront nulles, de ſorte qu'on aura dans ces cas

$$\int x^m a^x dx = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m}{(-la)^{m+1}}.$$

D'où je conclus, que la quantité $\frac{1}{(-la)^m}$ eſt égale à l'intégrale de $x^{m-1} a^x dx$ priſe depuis $x = o$ juſqu'à $x = \infty$, & diviſée par $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m - 1$; pourvu que a ſoit un nombre poſitif moindre que l'unité.

Si a étoit un nombre poſitif, plus grand que l'unité, il n'y auroit qu'à mettre $\frac{1}{a}$ à la place de x dans la formule précédente, & l'on en concluroit que la quantité $\frac{1}{(la)^m}$ ſeroit égale à l'intégrale de $\frac{x^{m-1} dx}{a^x}$ priſe de même depuis $x = o$ juſqu'à $x = \infty$, & diviſée par $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m - 1$; on voit par là comment on peut réduire les puiſſances quelconques de $\frac{1}{la}$ en des ſéries infinies qui procédent ſuivant les puiſſances de a.

Corollaire II.

38. Donc, ſi l'on a une fonction quelconque rationelle & ſans diviſeur de a telle que

$A = P a^p + Q a^{p-1} + R a^{p-2} +$ &c.

& qu'on demande le coefficient de la puiſſance a^{p-z} dans la fonction $\frac{A}{(la)^m}$; il n'y aura qu'à mettre, à la place de $\frac{1}{(la)^m}$, la ſomme des valeurs de $\frac{x^{m-1} dx}{a^x}$ depuis $x = o$

jusqu' à $x = \infty$, divisée par $1 . 2 . 3 \ldots m - 1$ (corol. préc.), & rassemblant touts les termes où a se trouvera elevé à la puissance donnée, on aura pour le coefficient de cette puissance la sèrie

$$\frac{P x^{m-1} + Q (x-1)^{m-1} + R (x-2)^{m-2} + \&c.}{1 . 2 . 3 \ldots m - 1} d x$$

laquelle ne devra être continuée que jusqu' à ce que quelqu' un des termes $x - 1$, $x - 2$ &c. devienne négatif; & comme ce coefficient ne dépend point de la valeur de a, il est clair que la formule que nous venons de trouver aura toujours lieu, soit que a soit plus grand ou moindre que l' unité.

Si au lieu de la fonction $\frac{A}{(la)^m}$ on avoit celle-ci : $\frac{A}{(la-\alpha)^m}$; comme $la - \alpha = l\frac{a}{e^\alpha}$, il faudroit substituer à la place de $\frac{1}{(la-\alpha)^m}$ la somme des valeurs de $\frac{e^{\alpha x} x^{m-1} dx}{a^x}$ depuis $x = o$ jusqu' à $x = \infty$, divisée par $1 . 2 . 3 . m - 1$, & l' on auroit pour le coefficient de a^{p-x} la sèrie

$$\frac{P e^{\alpha x} x^{m-1} + Q e^{\alpha(x-1)} (x-1)^{m-1} + R e^{\alpha(x-2)} (x-2) \ldots \&c.}{1 . 2 . 3 \ldots . m - 1} d x$$

Enfin, si on avoit la fonction

$$\frac{A}{(la+\alpha)^m (la-\beta)^n \ldots .}$$

on décomposeroit d' abord, par les méthodes connues, la fraction

$$\frac{1}{(la+\alpha)^m (la-\beta)^n \ldots .}$$ en celles-ci

$$\frac{F}{(la-\alpha)^m} + \frac{F'}{(la-\alpha)^{m-1}} + \&c. + \frac{F^{m-1}}{la-\alpha}$$
$$+ \frac{G}{(la-\beta)^n} + \frac{G'}{(la-\beta)^{n-1}} + \&c. + \frac{G^{n-1}}{la-\beta}$$
$$+ \&c.$$

enſuite multipliant chacune de ces fractions par A, on auroit autant de fonctions de a, dans leſquelles on pourroit trouver le coefficient de la puiſſance a^x par la formule ci-deſſus.

Remarque.

39. Par le moyen du lemme précédent on peut trouver l'intégrale de $\int y\, a^x\, dx$ lorſque $y = X\, e^{-\alpha x}$, X étant une fonction rationelle & ſans diviſeur de x, telle que ſa différentielle d'un ordre quelconque ſoit conſtante; car pour cela il n'y aura qu'à mettre dans la formule du lemme, X à la place de y & $a e^{-\alpha}$ à la place de a; moyennant quoi on aura

$$\int \frac{X\, a^x}{e^{x\alpha}}\, dx = \frac{a^x}{e^{\alpha x}} \left(\frac{X}{la - \alpha} - \frac{dX}{dx\,(la-\alpha)^2} + \frac{d^2 X}{dx^2\,(la-\alpha)^3} - \&c. \right) + const.$$

Et on trouvera de même l'intégrale de $y\, a^x\, dx$, lorſque y ſera compoſée de différentes fonctions de même eſpèce que $\frac{X}{e^{\alpha x}}$.

D'où il s'enſuit que l'on pourra auſſi trouver l'intégrale de $y\, a^x\, dx$ lorſque y ſera de cette forme $X\, cof.\, \alpha x$, ou $X\, ſin.\, \alpha x$, ou compoſée de pluſieurs fonctions d'une forme ſemblable; car il n'y aura qu'à mettre à la place des *ſinus* & *coſinus* les expreſſions exponentielles imaginaires qui leur ſont équivalentes, & le calcul achevé on remettra à la place de ces expreſſions, les *ſinus* ou *coſinus* qui y répondent.

Ce ſont là les ſeuls cas où la formule $y\, a^x\, dx$ ſoit intégrable, au moins par les méthodes connues juſqu'ici; dans tous les autres cas l'intégration ne peut s'exécuter que par approximation.

Problême

Problème X.

40. On ſuppoſe que chaque obſervation ſoit ſujette à toutes les erreurs poſſibles compriſes entre ces deux limites p & $-q$, & que la facilité de chaque erreur, x c'eſt-à-dire, le nombre des cas où elle peut avoir lieu, diviſé par le nombre total des cas, ſoit repréſentée par une fonction quelconque de x déſignée par γ; on demande la probabilité que l'erreur moyenne de n obſervations ſoit compriſe entre les limites r, & $-s$.

On commencera d'abord par chercher la probabilité que l'erreur moyenne ſoit ζ, & cette probabilité étant repréſentée par une fonction de ζ, il n'y aura qu'à en prendre l'intégrale depuis $\zeta = r$ juſqu'à $\zeta = s$; ce ſera la probabilité cherchée.

Maintenant pour avoir la probabilité que l'erreur moyenne de n obſervations ſoit ζ, il faudra conſidérer le polynome qui eſt repréſenté par l'intégrale de $y\, a^x\, dx$, en ſuppoſant cette intégrale priſe de manière qu'elle s'étende depuis $x = p$ juſqu'à $x = -q$, l'on élèvera ce polynome à la puiſſance n, & l'on cherchera le coefficient de puiſſance ζ de a, par les règles données dans les coroll. du lemme préc.; ce coefficient, qui ſera une fonction de ζ exprimera la probabilité que l'erreur moyenne ſoit ζ, comme il eſt facile de le voir d'après ce qui a été démontré plus haut.

Exemple I.

41. Suppoſons d'abord que y ſoit une quantité conſtante $= K$, enſorte que toutes les erreurs ſoient également probables, & l'intégrale de $y\, a^x\, dx$ ſera $\frac{K a}{l a}$, de ſorte qu'en prenant cette intégrale depuis $x = p$ juſqu'à $x = -q$, on aura pour ſa valeur complette $\frac{K}{l a}\left(a^p - a^{-q}\right)$; qu'on élève donc cette quantité à la puiſ-

ſance n, & l'on aura une quantité de la forme $\frac{A}{(la)^n}$, où (faiſant $p + q = t$)

$$A = K^n \left(a^{pn} - n\, a^{pn-t} + \frac{n(n-1)}{2}\, a^{pn-2t} - \text{&c.}\right)$$

Donc par le coroll. 2 du lemme (art. 38.) le coefficient de puiſſance a^{pn-s} ſera

$$\frac{K^n}{1.2.3\ldots n-1}\left(x^{n-1} - n(x-t)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}(x-2t)^{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}(x-3t)^{n-1} + \text{&c.}\right) dx$$

en ayant ſoin de ne continuer la ſérie que juſqu'à ce qu'on parvienne à des termes $x - mt$ qui ſoient négatifs. Faiſant donc $pn - x = z$, c'eſt-à dire, $x = pn - z$ on aura la probabilité que l'erreur moyenne de n obſervations ſoit z. On intégrera maintenant la formule précédente en y faiſant varier x, & on prendra l'intégrale, enſorte qu'elle ſoit nulle lorſque $x = pn - r$, & complette lorſque $x = pn + s$; on aura de cette manière la quantité

$$\frac{K^n}{1.2.3\ldots n}\Big((pn+s)^n - n(pn+s-t)^n + \frac{n(n-1)}{2}(pn+s-2t)^n - \text{&c.} - (pn-r)^n + n(pn-r-t)^n - \frac{n(n-1)}{2}(pn-r-2t)^n + \text{&c.}\Big)$$

laquelle exprimera la probabilité que l'erreur moyenne de n obſervations ſoit contenue entre les limites r & $-s$; au reſte cette formule revient à la même que celle de l'art. 27.

Exemple II.

42. On ſuppoſe que la quantité y ſoit $= K(p^2 - x^2)$, & que les deux limites des erreurs ſoient p & $-p$, il faudra intégrer la différentielle $K a^x (p^2 - x^2)\, dx$, & prendre l'intégrale enſorte qu'elle s'étende depuis $x = -p$

jusqu'à $x = p$. Or, puisque la seconde différentielle de $p^2 - x^2$ est constante, on aura par le lemme cette intégrale

$$K a^x \left(\frac{p^2 - x^2}{l a} + \frac{2x}{(l a)^2} - \frac{2}{(l a)^3} \right)$$

laquelle étant complétée, comme on vient de le dire, donnera

$$\frac{2 K p (a^p + a^{-p})}{(l a)^2} - \frac{2 K (a^p - a^{-p})}{(l a)^3};$$

On élèvera donc cette quantité à la puissance n, & l'on aura

$$\frac{(2Kp)^n (a^p + a^{-p})^n}{(l a)^{2n}} - n \cdot \frac{(2K)^n p^{n-1} (a^p + a^{-p})^{n-1} (a^p + a^{-p})}{(l a)^{2n+1}}$$
$$+ \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{(2K)^n p^{n-2} (a^p + a^{-p})^{n-2} (a^p - a^{-p})^2}{(l a)^{2n+2}}$$
— &c.

on développera les puissances de $a^p + a^{-p}$ & de $a^p - a^{-p}$, & l'on cherchera ensuite par les règles de l'art. 38. le coefficient de la puissance a^z. Pour faciliter ces opérations nous supposerons

$(a^p + a^{-p})^n = a^{pn} + P a^{pn-2p} + Q a^{pn-4p} +$ &c.
$(a^p + a^{-p})^{n-1} (a^p - a^{-p}) = a^{np} + P a^{np-2p} + Q' a^{np-4p} +$ &c.
$(a^p + a^{-p})^{n-2} (a^p - a^{-p})^2 = a^{np} + P'' a^{np-2p} + Q'' a^{np-4p} +$ &c.
&c.

& l'on trouvera, pour le coefficient de la puissance $np - x$, la série

$$\frac{(2Kp)^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 2n-1} \left(x^{2n-1} + P(x-2p)^{2n-1} + Q(x-4p)^{2n-1} + \text{&c.} \right) dx$$
$$- n \frac{(2K)^n p^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 2n} \left(x^{2n} + P'(x-2p)^{2n} + Q(x-4p)^{2n} + \text{&c.} \right) du$$
$$+ \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{(2K)^n p^{n-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 2n+1} \left(x^{2n+1} + P'(x-2p)^{2n+1} + Q(x-4p)^{2n+1} + \text{&c.} \right) dx$$
— &c.

On fera donc $z = np - x$, c'est à-dire, $x = np - z$, & on intégrera de manière que l'intégrale soit nulle lorsque $z = r$,

& complette lorſque $z = -s$, c' eſt-à-dire, nulle quand $x = np - r$, & complette quand $x = np + s$, on aura la quantité

$$\frac{(2Kp)^n}{1.2.3...2n}\Big((np+s)^{2n}+P((n-2)p+s)^{2n}+Q((n-4)p+s)^{2n}+\&c.$$
$$-(np-r)^{2n}+P((n-2)p-r)^{2n}-Q((n-4)p-r)^{2n}-\&c.\Big)$$
$$-n\frac{(2K)^n p^{n-1}}{1.2.3...2n+1}\Big((np+s)^{2n+1}+P'((n-2)p+s)^{2n+1}+Q'((n-4)p+s)^{2n+1}+\&c.$$
$$-(np-r)^{2n+1}-P'((n-2)p-r)^{2n+1}-Q'((n-4)p-r)^{2n+1}-\&c.\Big)$$
$$+\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{(2K)^n p^{n-2}}{1.2.3...2n+2}\Big((np+s)^{2n+2}+P''((n-2)p+s)^{2n+2}+Q''((n-4)p+s)^{2n+2}+\&c$$
$$-(np-r)^{2n+2}-P''((n-2)p-r)^{2n+2}-Q''((n-4)p-r)^{2n+2}-\&c.\Big)$$
$$-\&c.$$

laquelle exprimera la probabilité que l' erreur moyenne de n obſervations ſoit compriſe entre les limites r, & $-s$; au reſte il faudra toujours ſe ſouvenir que les ſéries précédentes ne doivent être continuées que juſqu' à ce que quelques unes des quantités qui ſont élevées aux puiſſances $2n$, $2n+1$ &c. deviennent négatives.

Remarque.

43. L' hypothèſe du dernier exemple paroit la plus ſimple & la plus naturelle qu' on puiſſe imaginer; Il eſt vrai que celle du problème 8. paroit encore plus ſimple, puiſqu'on y ſuppoſe que la facilité des erreurs x & $-x$ ſoit repréſentée par $p - x$, p étant la plus grande valeur poſſible de x, c' eſt-à-dire, la limite des erreurs tant poſitives que négatives; mais cette hypothèſe a l' inconvenient que la loi de continuité n' y eſt pas obſervée en paſſant des erreurs poſitives, aux négatives; c'eſt pourquoi, ſi on vouloit y appliquer la méthode du prob. préc., il faudroit en faiſant $y = K(p - x)$ prendre d' abord l' intégrale de

$\int y\, a^x\, dx$ depuis $x = o$ jusqu'à $x = p$, laquelle seroit

$$K\left(\frac{a^p - 1}{(la)^2} - \frac{p}{la}\right).$$

ensuite, en faisant x négatif, & conservant la même valeur de y, il faudroit prendre de même l'intégrale de $\int y a^{-x} dx$ depuis $x = o$ jusqu'à $x = p$, laquelle seroit (en ne faisant que mettre $\frac{1}{a}$ à la place de a dans l'expression précédente)

$$K\left(\frac{a^{-p} - 1}{(la)^2} + \frac{p}{la}\right)$$

& la somme de ces deux intégrales particulières seroit l'intégrale complette de $\int y\, a^x\, dx$ depuis $x = p$ jusqu'à $x = -p$ dans l'hypothese dont il s'agit; on aura donc la quantité $K\left(\frac{a^p + a^{-p} - 2}{(la)^2}\right)$, ou bien $K\left(\frac{a^{\frac{p}{2}} - a^{-\frac{p}{2}}}{la}\right)^2$ qu'il faudra élever à la puissance n, & sur laquelle on pourra ensuite opérer, comme dans l'exemple I.; on pourra même, sans faire un nouveau calcul, appliquer ici les formules de cet exemple en y mettant $2n$ à la place de n, $\frac{p}{2}$ à la place de p, & de q, & par conséquent p à la place de $t = p + q$; de cette manière on aura sur le champ l'expression de la probabilité que l'erreur moyenne de n observations soit renfermée entre les limites r, & $-s$, laquelle sera

$$\frac{K^{2n}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 2n}\Big((p n + s)^{2n} - 2n((n-1)p + s)^{2n} + \frac{2n(2n-1)}{2}((n-2)p + s)^{2n} - \&c.$$
$$- (p n - r)^{2n} + 2n((n-1)p - r)^{2n} - \frac{2n(2n-1)}{2}((n-2)p - r)^{2n} + \&c.\Big)$$

ce qui s'accorde avec la formule de l'art. 31.

Problême II.

44. Suppoſant que chaque obſervation ſoit ſujette à toutes les erreurs poſſibles compriſes entre les limites p & $-p$, (p étant l'arc de 90 dégrès) & que la facilité de chaque erreur x ſoit proportionelle a *cof.* x; on demande la probabilité que l'erreur moyenne de n obſervations ſera renfermée entre les limites r & $-s$.

On aura donc ici $y = K$ *cof.* x, & il s'agira d'abord d'intégrer la différentielle $K\, a^x$ *cof.* $x\, dx$, dont l'intégrale, (en mettant $\frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$ à la place de *cof.* x) ſe trouvera par l'art. 39.

$$\frac{K a^x}{2}\left(\frac{e^{x\sqrt{-1}}}{la+\sqrt{-1}} + \frac{e^{-x\sqrt{-1}}}{la-\sqrt{-1}}\right)$$

c'eſt-à dire, en repaſſant des exponentiels imaginaires aux *ſinus* & *coſinus*,

$$K\, a^x \left(\frac{la \text{ cof. } x + \text{ſin. } x}{(la)^2 + 1}\right)$$

cette intégrale doit maintenant être priſe enſorte qu'elle s'étende depuis $x = -p$, auquel cas *cof.* $x = o$ & *ſin.* $x = 1$ juſqu'à $x = p$, où *cof.* $x = o$ & *ſin.* $x = 1$; ainſi l'on aura pour l'intégrale complette

$$\frac{K\,(a^p + a^{-p})}{(la)^2 + 1}$$

Qu'on élève donc cette quantité à la puiſſance n, & faiſant pour abréger

$$A = K^n\,(a^{pn} + n\, a^{pn-2p} + \frac{n\,(n-1)}{2}\, a^{pn-4p} + \text{&c.})$$

on aura la quantité $\frac{A}{((la)^2+1)^n}$ dans laquelle il s'agira maintenant de chercher le coefficient de la puiſſance a^z.

Pour cela il faudra (art. 38.) décompoſer la fraction $\frac{1}{((la)^2+1)^n}$ c'eſt-à-dire, $\frac{1}{(la+\sqrt{-1})^n\,(la-\sqrt{-1})^n}$ en ces fra-

ctions ſimples

$$\frac{F}{(la+\sqrt{-1})^n} + \frac{F'}{(la+\sqrt{-1})^{n-1}} + \frac{F''}{(la+\sqrt{-1})^{n-2}} + \text{&c.}$$
$$+\frac{G}{(la-\sqrt{-1})^n} + \frac{G'}{(la-\sqrt{-1})^{n-1}} + \frac{G''}{(la-\sqrt{-1})^{n-2}} + \text{&c.}$$

& l'on aura par les méthodes connues (art. 33.)

$$F=\frac{1}{(-2\sqrt{-1})^n},\ F'=-\frac{n}{(-2\sqrt{-1})^{n+1}},\ F''=\frac{n(n+1)}{2(-2\sqrt{-1})^{n+2}}\ \text{&c.}$$
$$G=\frac{1}{(2\sqrt{-1})^n},\ G'=-\frac{n}{(2\sqrt{-1})^{n+1}},\ G''=\frac{n(n+1)}{2(2\sqrt{-1})^{n+2}}\ \text{&c.;}$$

multipliant enſuite par A chacune de ces fractions, on trouvera par la méthode de l'art. 38., que le coefficient de la puiſſance a^{pn-x} ſera exprimé de cette manière

$$\frac{K^n\,dx}{1.2.3\ldots n-1}\Big((Fe^{-x\sqrt{-1}}+Ge^{x\sqrt{-1}})x^{n-1}$$
$$+n\,(Fe^{-(x-2p)\sqrt{-1}}+Ge^{(x-2p)\sqrt{-1}})\,(x-2p)^{n-1}$$
$$+\frac{n(n-1)}{2}(Fe^{-(x-4p)\sqrt{-1}}+Ge^{(x-4p)\sqrt{-1}})\,(x-4p)^{n-1}+\text{&c.}\Big)$$
$$+\frac{K^n\,dx}{1.2.3\ldots n-2}\Big((F'e^{-x\sqrt{-1}}+G'e^{x\sqrt{-1}})\,x^{n-2}$$
$$+n\,(F'e^{-(x-2p)\sqrt{-1}}+G'e^{(x-2p)\sqrt{-1}})\,(x-2p)^{n-2}$$
$$+\frac{n(n-1)}{2}(F'e^{-(x-4p)\sqrt{-1}}+G'e^{(x-4p)\sqrt{-1}})\,(x-4p)^{n-2}+\text{&c.}\Big)$$
$$+\frac{K^n\,dx}{1.2.3\ldots n-3}\Big((F''e^{-x\sqrt{-1}}+G''e^{x\sqrt{-1}})\,x^{n-3}$$
$$+n\,(F''e^{-(x-2p)\sqrt{-1}}+G''e^{(x-2p)\sqrt{-1}})\,(x-2p)^{n-3}$$
$$+\frac{n(n-1)}{2}(F''e^{-(x-4p)\sqrt{-1}}+G''e^{(x-4p)\sqrt{-1}})\,(x-4p)^{n-3}+\text{&c.}\Big)$$
$$+\ \text{&c.}$$

Or on a $e^{\pm x\sqrt{-1}}=\cos.x\pm\sqrt{-1}\sin.x$, & ainſi des autres; donc ſubſtituant ces valeurs, & faiſant pour abréger

$$G+F=f,\ G-F=\frac{g}{\sqrt{-1}},\ G'+F'=f',\ G'-F'=\frac{g'}{\sqrt{-1}}$$
$$G''+F''=f'',\ G''-F''=\frac{g''}{\sqrt{-1}}\ \text{&c.,}$$

où les quantités

f, g, f', g' &c. seront nécessairement réelles, la formule précédente deviendra

$$\frac{K^n\,dx}{1.2.3..n-1}\Big(\,(f\,cos.\,x+g\,sin.\,x)\,x^{n-1}$$
$$+\,n\,(f\,cos.\,(x-2p)+g\,sin.\,(x-2p))\,(x-2p)^{n-1}$$
$$+\frac{n(n-1)}{2}\,(f\,cos.\,(x-4p)+g\,sin.\,(x-4p))\,(x-4p)^{n-1}+\&c.\Big)$$
$$+\,\frac{K^n\,dx}{1.2.3\ldots n-2}\Big((f'\,cos.\,x+g'\,sin.\,x)\,x^{n-2}$$
$$+\,n\,(f'\,cos\,(x-2p)+g'\,sin.\,(x-2p))\,(x-2p)^{n-2}$$
$$+\frac{n(n-1)}{2}\,(f'cos.\,(x-4p)+g'sin.\,(x-4p)(x-4p)^{n-2}+\&c.\Big)$$
$$+\,\frac{K^n\,dx}{1.2.3\ldots n-3}\Big((f''\,cos.\,x+g''\,sin.\,x)\,x^{n-3}$$
$$+\,n\,(f''\,cos.\,(x-2p)+g''\,sin.\,(x-2p))\,(x-2p)^{n-3}$$
$$+\frac{n(n-1)}{2}(f''\,cos.(x-4p)+g''\,sin.\,(x-4p)\,(x-4p)^{n-3}+\&c.\Big)$$
$$+\,\&c.$$

où il faudra continuer les différentes séries jusqu'à ce que les quantités x, $x-2p$, $x-4p$ &c. ou leurs exposans deviennent négatifs; cette quantité exprimera donc la probabilité que l'erreur moyenne de n observations soit $p\,n-x$; par conséquent il n'y aura plus qu'à l'intégrer de manière que l'intégrale soit nulle lorsque $x=p\,n-r$, & complette lorsque $x=p\,n+s$ pour avoir l'expression cherchée de la probabilité que l'erreur moyenne soit renfermée entre les limites données r & $-s$; mais comme cette intégration est facile par les méthodes connues, nous n'entrerons pas dans un plus grand détail là-dessus; & nous terminerons même ici nos recherches, par lesquelles on doit voir qu'il ne reste plus de difficulté dans la solution des questions qu'on peut proposer sur ce sujet.

THEO-

THEORÈME

Pour servir de suite au mémoire sur différentes questions d'Analyse.

PAR M. LE MARQUIS DE CONDORCET.

Soient les 3 équations $V = o$, $V' = o$, $V'' = o$; V, V', V'' étant fonctions de x, y, z, si je mets ces équations sous la forme $x = A + \varphi$, $y = B + \varphi'$, $z = C + \varphi''$, où $\varphi, \varphi', \varphi'$ contienent d'une façon quelconque les trois variables x, y, z, j'aurai $\Psi x, y, z = \Psi A, B, C + \frac{(2)}{\frac{d\Psi}{dA}}\varphi + \frac{(3)}{\frac{d^2\Psi}{2.dA^2}}\varphi^2 + \frac{d^3\Psi}{2.3.dA^3}\varphi^3$

(Ψxyz, est une autre fonction quelconque de x, y, z)

$$+ \frac{d\Psi}{dB}\varphi' + \frac{2dd\Psi}{2dAdB}\varphi\varphi' + \ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{d\Psi}{dC}\varphi'' + \frac{2dd\Psi}{2dAdC}\varphi\varphi'' + \ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{2dd\Psi}{2dBdC}\varphi'\varphi'' + \frac{dd\Psi}{2dA^2}$$

$$+ \frac{dd\Psi}{dB^2}\varphi'^2 + \frac{2dd\Psi}{2dAdB}\varphi D' + \varphi' D$$

$$+ \frac{dd\Psi}{dC^2}\varphi''^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{d\Psi}{dA}D + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{d\Psi}{dB}D' + \frac{d\Psi}{dA}E$$

$$+ \frac{d\Psi}{dC}D'' + \frac{d\Psi}{dB}E'$$

$$+ \frac{d\Psi}{dB}E''$$

où D, D', D'' sont ce que devient le terme (2) en y mettant pour Ψ, φ, φ', ou φ'', E, E' E'' ce que devient le terme (3) en y mettant pour Ψ, φ, φ', ou φ''; & le

terme (m) se trouvera en prenant $\Psi(A+\Delta A, B+\Delta B, C+\Delta C)$ par le théorème de M. d'Alembert, en mettant pour $\Delta A, \Delta B, \Delta C$ $\varphi+\varphi^{(2)}+\varphi^{(3)}+\varphi^{(4)}\ldots\ldots+\varphi^{(n-2)}\ldots\varphi'+\varphi'^{(2)}+\varphi'^{(3)}\ldots\ldots+\varphi'^{(n-2)}$, $\varphi''+\varphi''^{(2)}+\varphi''^{(3)}\ldots+\varphi''^{(n-2)}$, $\varphi^{(m)}$ $\varphi'^{(m)}$ $\varphi''^{(m)}$; désignant en général le terme (m) de la série en Ψ où pour Ψ on auroit mis φ, φ' ou φ'', & en prenant dans ce que devient alors $\Psi A+\Delta A, B+\Delta B, C+\Delta C$, le terme où φ & Ψ montent au dégré n, les fonctions $\varphi^{(m)}$ $\varphi'^{(m)}$ $\varphi''^{(m)}$ étant regardées comme du dégré m; on aura donc la valeur de chaque terme de la série qui représente $\Psi x, y, z$, par une fonction finie des termes précédents.

Si cette forme ne paroit pas assez simple, on peut y substituer celle-ci,

$$\begin{aligned}
\Psi x,y,z = \Psi A,B,C &+ \frac{d\Psi}{dA}\varphi + \frac{d\frac{d\Psi}{dA}\varphi^2}{2\,dA} + \frac{d^2\left(\frac{d\Psi}{dA}\varphi^3\right)}{2\cdot 3\ldots dA^3} + \frac{d^3\left(\frac{d\Psi}{dA}\varphi^4\right)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot dA^4} \\
&+ \frac{d\Psi}{dB}\varphi' + \frac{\varphi'}{\varphi}\frac{d\frac{d\Psi}{dA}\varphi^2}{2\,dB} + \frac{d^2\left(\frac{d\Psi}{dA}V\right)}{2\cdot 3\cdot dA\,dB} + \ldots\ldots \\
&+ \frac{d\Psi}{dC}\varphi'' + \frac{\varphi''}{\varphi}\frac{d\frac{d\Psi}{dA}\varphi^2}{2\,dC} + \frac{d^2\left(\frac{d\Psi}{dA}V\right)}{2\cdot 3\cdot dB\,dA} \\
&\quad + \frac{d\left(\frac{d\Psi}{dB}\varphi^{12}\right)}{2\,dB} + \ldots\ldots \\
&\quad + \frac{\varphi}{\varphi'}\frac{d\frac{d\Psi}{dB}\varphi^{12}}{dA} + \ldots\ldots \\
&\quad + \frac{\varphi''}{\varphi'}\frac{d\left(\frac{d\Psi}{dB}\varphi^{12}\right)}{2\,dC} \\
&\quad + \frac{d\left(\frac{d\Psi}{dC}\varphi^{12}\right)}{2\,dC} \\
&\quad + \frac{\varphi'}{\varphi''}\frac{d\left(\frac{d\Psi}{dC}\varphi''^2\right)}{2\,dB} \\
&\quad + \frac{\varphi}{\varphi''}\frac{d\left(\frac{d\Psi}{dC}\varphi''^2\right)}{2\,dA}
\end{aligned}$$

où V eſt une quantité telle que

$$\frac{dV}{dA} = \frac{\Phi'}{\Phi} \frac{d(\Phi^2 \Phi' \times \frac{\Theta}{\Phi})}{dA} \frac{dV}{dB} = \frac{\Phi'}{\Phi} \frac{d(\Phi^2 \Phi' \times \frac{\Theta}{\Phi})}{dB} \frac{d(\frac{dV}{dA})}{dB}$$

$$= \frac{\Phi'}{\Phi} d(\frac{dV}{dA} \frac{\Theta}{\Phi}) \text{ \& } \frac{d(\frac{dV}{dB})}{dA} = \frac{\Phi}{\Phi'} \frac{d(\frac{dV}{dB} \frac{\Theta'}{\Phi})}{dA}, \text{ \& ainſi}$$

de ſuite. Ces termes ſuffiſent pour voir la manière dont il faut s'y prendre pour trouver les autres & continuer la ſérie. On voit que la méthode eſt générale pour un nombre quelconque de variables. Le théorème ſe démontrera toujours avec la même facilité, & de la même manière que j'ai démontré celui de M. De la Grange pour une ſeule variable. Il eſt inutile de s'étendre ici ſur l'uſage qu'on en peut faire dans tous les problêmes dépendans des éliminations & des ſéries.

NOUVELLES RECHERCHES

Sur les équations déterminées, pour servir de suite & de développement au mémoire sur le même objet, déja inséré dans ce volume.

Le but que je me propose ici est de prouver. 1.° Que si une équation déterminée de l'ordre n est résoluble par une formule générale, c'est-à-dire, si sa racine est susceptible d'une expression finie; il n'y a, pour la trouver, d'autre difficulté que celle de la longueur des calculs. 2.° D'indiquer la marche d'une méthode générale, par laquelle on parviendroit dans ce cas à trouver la racine, & d'examiner les moyens de faciliter cette méthode que l'analyse peut fournir. 3.° D'indiquer comment on pourroit s'assurer si une telle équation est ou n'est pas possible.

ARTICLE I.

De la forme générale des fonctions radicales, du degré où montent les équations qui servent à les déterminer, & de la recherche des coefficiens de ces équations; d'où l'on déduit la preuve du premier objet de ce mémoire.

I. Soit la forme $\sqrt[n]{A}$, elle a n valeurs: ces n valeurs sont $\sqrt[n]{A}$ multiplié successivement par les n racines de l'équation $y^n - 1$; & si on fait $x = \sqrt[n]{A}$, on aura $x^n - A = 0$.

II. Soit $x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C}$ &c. ces quantités étant au nombre de m, comme chacune peut être multipliée par chacune de n racines de $y^n - 1 = 0$, x pourra avoir n^m valeurs, & par conséquent sera donné par une équation du degré n^m.

III. Il eſt aiſé de voir que cette équation ne peut contenir que les termes

$$x^{n^m}, \quad x^{n^m} - n, \quad x^{n^m} - 2n, \quad \&c.$$

en effet ce ſont les ſeuls qui puiſſent contenir les termes rationnels A, B, C, &c. A^2, B^2, C^2, AB, AC, &c.

IV. Chaque A, B, C, &c. devant entrer d'une manière ſemblable dans les coefficiens, le coefficient de $x^{n^m} - n$ ſera de la forme

$$A + B + C \ldots\ldots \times p;$$

celui de $x^{n^m} - 2n$ ſera

$$\frac{A^2 + B^2 + C^2 \ldots . p'}{+ AB + AC \ldots\ldots + BC, \text{ \&c. } q';}$$

celui de $x^{n^m} - 3n$ ſera

$$A^3 + B^3 + C^3 \ldots\ldots p''$$
$$+ A^2B + A^2C + B^2A + B^2C \text{ \&c. } q''$$
$$+ ABC \text{ \&c. } r''; \text{ \& ainſi de ſuite.}$$

V. Pour trouver p, on obſervera que $\sqrt[n]{A}$ a pour coefficiens toutes les racines de l'équation $y^n - 1$, répétées un nombre n^{m-1} de fois chacune, ou bien les racines de l'équation $y^{n^{m-1}} - 1 = 0$; donc le coefficient de $(\sqrt[n]{A})^a$ ou le coefficient de A ſera la ſomme des produits de toutes les racines de l'équation $y^{n^{m-1}} - 1 = 0$, priſes n à n, c'eſt-à-dire, au coefficient de $y^{n^m} - n$, dans $y^n - 1$ élevé à la puiſſance n^{m-1}, ou à $-(n^{m-1})$.

VI. Pour trouver p', on obſervera que par la même raiſon ce terme doit être égal au coefficient de $y^{n^m} - 2n$ dans $y^{n^{m-1}} - 1$ égal à $\frac{n^{m-1} \cdot n^{m-1} - 1}{2}$; p'' ſera égal à $-\frac{n^{m-1} \cdot n^{m-1} - 1 \cdot n^{m-1} - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$; & ainſi de ſuite.

VII. Pour avoir q', on observera que le coefficient de $x^{n^m - 2n}$ est égal à la somme des produits des racines prises $2n$ à $2n$; que dans chacun de ces produits on aura pour coefficient de AB la somme d'un nombre de produits des racines de $y^{n^{m-1}} - 1$ prises $2n$ à $2n$ égal au coefficient de $P^n Q^n$ dans $\overline{P + Q}^{2n}$; mais le coefficient total de AB doit contenir tous les produits des racines de $y^{n^{m-1}} - 1$, $2n$ à $2'n$, d'une manière semblable; donc, puisqu'il contient un nombre de ces produits égal au nombre qu'il y en a de différens, multiplié par le coefficient de $P^n Q^n$ dans $\overline{P + Q}^{2n}$, il sera égal à la somme des produits des racines de l'équation $y^{n^{m-1}} - 1$, prises $2n$ à $2n$, multipliées par le coefficient de $P^n Q^n$ dans $\overline{P + Q}^{2n}$.

VIII. De même q'' sera égal à $\frac{n^{m-1} \cdot n^{m-1} - 1 \cdot n^{m-1} - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$; multipliant le coefficient de $P^{2n} Q^n$ dans $\overline{P + Q}^{3n}$, & r'' au même terme multiplié par le coefficient de $P^n Q^n R^n$ dans $\overline{P + Q + R}^{3n}$, & ainsi de suite; en sorte que le coefficient de $x^{n^m - np}$ sera

$$+ - \frac{n^{m-1} \cdot n^{m-1} - 1 \cdot n^{m-1} - 2 \ldots n^{m-1} - p + 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots p} \times \Big(A^p + B^p \ldots$$
$$+ p, A^{p-1} B \ldots$$
$$\ldots$$
$$+ z A^u B^t C^s \ldots \Big)$$

p, étant le coefficient de $P^{np-n}\,Q^{n}$ dans $\overline{\overline{\overline{P+Q}}}^{np}$, & ζ le coefficient de $P^{un}\,Q^{tn}\,R^{sn}$ dans $\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{P+Q+R}}}}}^{np}$, $u+t+s\ldots\ldots=p$.

IX. Suppoſons maintenant que au lieu de $x=\sqrt[n]{A}+\sqrt[n]{B}+\sqrt[n]{C}$ &c., au nombre de m, (qui ne varient que ſelon les coefficiens de $\sqrt[n]{A}$, $\sqrt[n]{B}$ &c. qui ſont les racines de $y^{n}-1=0$,) nous avons auſſi les A, B, C, &c. qui varient & qui deviennent ſuſceptibles de p combinaiſons différentes, l'équation en x deviendra du degré $p.n^{m}$. Suppoſons les différentes combinaiſons de A, B, C, &c. indépendantes les unes des autres, nous aurons l'équation en x égale au produit de p équations du degré n^{m} ſemblables entr'elles, & données par ce qui précède.

X. Soit donc $x^{n}=\zeta$, $n^{m}=q$, nous aurons p équations

$\zeta^{q}+PQ^{q-1}+Q\zeta^{q-2}+R\zeta^{q-3}\ldots.$

$\zeta^{q}+P'\zeta^{q-1}+Q'\zeta^{q-2}+R'\zeta^{q-3}$ &c.

Donc le coefficient de ζ^{qp-1} ſera $P+P'+P''$, &c. celui de ζ^{qp-2} ſera $Q+Q'+Q''+PP'+PP''\ldots.$ & ainſi de ſuite.

XI. Maintenant ſoit s le degré de l'équation A, B, C &c. r le nombre des A, B, C, &c. différens qui entrent dans chaque racine (voyez le n.° ſuivant) p ſera égal à $\frac{s.s-1.s-2\ldots}{1.2\ldots\ldots r}$: maintenant il eſt aiſé de voir que $P+P'+P''$ &c. doit (*article précédent*) être égal à n^{m-1}, puiſque j'appelle r ici ce qui étoit m (*articles précédens*). Multipliant $\frac{s.s-1.s-2\ldots.}{1.2\ldots\ldots r}$ ſommes de r A, B, C, &c. donc cette ſomme contiendra $\frac{s.s-1.s-2\ldots.}{1.2\ldots.r-1}$ termes A, B, C, &c. donc, puiſque chaque terme y entre d'une manière ſemblable, diviſant par s, on aura

$P + P' \ldots = n^{r-1} \cdot \frac{s-1 \cdot s-2 \ldots}{1 \ldots r-1} \times$ (le second terme de l'équation en A).

XII. Enſuite $Q + Q' + Q'' = n^{r-1} \frac{s-1 \cdot s-2 \ldots}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots r-1} \times$ (ſomme des quarrés des racines de l'équation en A) $+ \frac{n^{r-1} \cdot n^{r-1} - 1}{2}$, multipliant le coefficient de $P^n Q^a$ dans $\overline{P+Q}^n$; multipliant une quantité égale à $\frac{s \cdot s-1 \cdot s-2 \ldots}{1 \cdot 2 \ldots r}$ produits deux à deux de A, B, C, pris entre r de ces quantités; donc ce nombre ſera $\frac{s \cdot s-1 \cdot s-2 \ldots}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots r} \cdot \frac{r \cdot r-1}{2}$ produits deux à deux, mais le nombre total eſt $\frac{s \cdot s-1}{2}$ & tous doivent y entrer ſemblablement: donc ce terme ſera égal à $\frac{s-2 \cdot s-3 \ldots}{1 \ldots r-2} \times$ (le troiſième terme de l'équation en A); enſuite pour avoir $PP' + PP'' \ldots$ je remarquerai que (le nombre des P étant p, celui de ces produits $\frac{p \cdot p-1}{1 \cdot 2}$) chacun contiendra $n^{\overline{r-1} \cdot 2}$ termes en A, B, C, &c. que dans la ſérie des P.. A ſera répété $\frac{s-1 \cdot s-2 \ldots}{1 \cdot 2 \ldots r-1} n^{r-1}$ fois; ou n^{r-1}. A un nombre $\frac{s-1 \cdot s-2 \ldots}{1 \cdot 2 \ldots r-1}$ fois que j'appelle p' fois, donc dans $PP' + PP''$ &c. A^2 ſe trouvera répété $\frac{p' p'-1}{2} n^{2 \cdot \overline{r-1}}$ fois; donc ce terme contiendra $\frac{p' p'-1 n^{2 \cdot \overline{r-1}}}{2}$ (ſomme des quarrés de A^2) plus $\frac{p \cdot p-1}{2} n^{2 \cdot r-1} - \frac{p' \cdot p'-1 n^{2 \cdot \overline{r-1}}}{2}$

termes

termes où les produits ſont de A, B, C, &c. différens; donc diviſant ce terme par $\frac{s \cdot s-1}{1 \cdot 2}$ & appellant le quotient M, on aura pour la valeur de ce terme $M \times$ (le troiſième terme de l'équation en A).

XIII. Connoiſſant donc l'équation en A, on aura par ce moyen les coefficiens de l'équation en x par la doctrine des combinaiſons, pourvu qu'on ait la manière de trouver les fonctions ſemblables de toutes les racines de l'équation en A.

XIV. Cela poſé, je ſuppoſe que j'aie

$$x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} \ldots\ldots$$

au nombre de p; que A ſoit de la forme

$$P + \sqrt[n']{A'} + \sqrt[n']{B'}$$

au nombre de p', j'aurai $s = n'^{p'}$; l'équation en $\overline{A - P}$ ſe formera comme ci-deſſus, & par conſéquent l'équation en x qui ſera du degré $\frac{n'^{p'} \cdot n'^{p'}-1 \ldots\ldots}{1 \cdot 2 \ldots\ldots\ldots p} \times n^p$.

XV. Si on ſuppoſe que les A', B', &c. ſont de la forme

$$p' + \sqrt[n'']{A''} + \sqrt[n'']{B''}$$

au nombre de p'', on aura A par une équation du degré $\frac{n'^{p''} \cdot n'^{p''}-1 \ldots\ldots}{2 \cdot 3 \ldots\ldots p'} n^{p'}$, & par conſéquent x par une équation du degré

$$\frac{n'^{p''} \cdot n'^{p''}-1 \ldots}{1 \ldots\ldots p'} n'^{p'} \cdot \frac{n'^{p''} \cdot n''^{p''}-1 \ldots}{2 \cdot 3 \ldots p'} n'^{p'-1} \ldots \frac{}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots\ldots p} n^p,$$

& ainſi de ſuite pour des formes plus compliquées.

XVI. Nous nous bornerons maintenant à conclure de cette Théorie; 1.° que l'on doit toujours ſuppoſer que $p <$ que le degré de l'équation en A, $p' <$ que le degré de l'équation en A', $p'' <$ que le degré de l'équation en A'', & ainſi de ſuite. Autrement le nombre des

A, B, C, étant plus grand qu'il ne peut être, il faudroit qu'ils fussent répétés plusieurs fois; ce qui est contre l'hypothèse. 2.° Qu'on n'a supposé pour l'équation en x que des racines où les A, B, C, &c. fussent différens dans chacune; il auroit été facile d'y faire entrer les racines où ils sont les mêmes; mais cela étoit inutile, parceque les racines où ils seroient les mêmes formeroient des séries de racines

$$2\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C}$$
$$2\sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{C}, \text{ \&c.}$$

où le nombre des radicaux est moindre, & qui donneroient par conséquent des racines rationnelles en x, d'un degré moindre que celui de la série totale des valeurs de x; donc l'équation en x seroit divisée par celles là, & le quotient seroit l'équation trouvée ci-dessus. 3.° Si on fait $p' = n''^{p''}$, on aura A par une équation du degré $n'^{p'}$; & si $p = n'^{p'}$, on aura x par une équation du degré n^p. Si on fait $p' = n''^{p''} - 1$ & $p = n'^{p'} - n''^{p''}$, on aura A par une équation du degré $n''^{p''} n'^{p'}$, & x par une équation du degré $n^p n'^p n''^{p''}$ &c. &c. &c.

XVII. Cela posé, imaginons que l'une des formes ci-dessus qui contient 2, 3 radicaux successifs, représente la racine de l'équation du degré n, comme (articles précédens) le degré où elle monte est toujours multiple de n; soit nu ce degré, on aura u équations du degré n, qui par leur multiplication doivent produire la proposée.

XVIII. Supposons d'abord que l'on ait l'équation $x^n + ax^{n-2} + b^2x^{n-3} + c^3x^{n-4} \ldots + h^n$, & que l'on ait l'équation du degré x^{nu}, dont (art. précéd.) les coefficiens soient donnés en P, P', $P'' \ldots A_{,,,}m$, $B_{,,,}m$, le nombre des P étant m, & $m+1$ le nombre des radicaux successifs; il est aisé de voir que si x est une fonction du degré 1 homogène & a, b, $c \ldots h$, P sera une fonction rationnelle & entière du degré n; P' une

du degré nn'; P'' du degré $nn'n''$, & $A_{\ldots n}$ du degré $nn'n''\ldots n^{(n)}$, & que les coefficiens de ces fonctions pourront être rationnels. Prenant donc l'équation hypothétique du degré nu formée par cette hypothèse, prenant une autre équation hypothétique du degré $nu - n$; multipliant celle-ci par la proposée, & comparant terme à terme, on aura, si on a pris pour n, n', n'', &c. des valeurs convenables, on aura, dis-je, les coefficiens rationnels des différens termes qui entrent dans $P, P', P''\ldots A_{\ldots n}$ par des équations numériques, & le problême sera résolu. Or comme on peut prendre n, n', n'' à volonté, & en aussi grand nombre qu'on veut, il est clair que toutes les fois qu'une équation aura une racine de cette forme, on la trouvera par cette méthode; donc pour prouver que cette méthode est générale pour toutes les équations, dont les racines ont une forme finie, il reste à prouver seulement que toutes les fonctions algébriques & finies peuvent être représentées par cette forme générale.

XIX. Je suppose d'abord que la fraction soit réduite à un seul dénominateur rationnel, ce qui est toujours possible en général, & que l'on fasse abstraction de ce dénominateur; je remarque 1.° que les formes

$$\sqrt[n]{A} + \sqrt[n']{B} + \sqrt[n'']{Q} \text{ &c.}$$

sont réductibles à la forme précédente, en les écrivant $\sqrt[nn'n''\ldots.]{A^{n'n''\ldots.}} + \sqrt[nn'n''\ldots.]{B^{nn''}}\ldots.$ &c. que les formes $P\sqrt[n]{A}$ sont les mêmes que $\sqrt{P^n A}$. 2.° Cela posé, supposons une forme où il y ait deux radicaux successifs; il est clair qu'elle sera (les radicaux supérieurs & inférieurs étant réduits au même degré, comme je viens de le dire) il est clair, dis-je, qu'elle sera de la forme

$$\sqrt[n]{A + \sqrt[m]{B} + \sqrt[m]{C}}\ldots\ldots\ldots \text{ (en nombre } r\text{)}$$

$$+ \sqrt[n]{A' + \sqrt[m]{B'} + \sqrt[m]{C'}}\ldots\ldots\ldots \text{ (en nombre } r'\text{)}$$

(& un nombre quelconque de termes de cette forme). Dans ce cas il eſt aiſé de voir que ſuppoſant que r eſt le plus grand des r, r', r'', &c. on peut mettre le terme A' & tous les termes ſemblables ſous la forme $A + \sqrt[m]{(A' - A'^m)}$, alors la forme deviendra

$$\sqrt[n]{A + \sqrt[m]{B} + \sqrt[m]{C}}$$

$$\sqrt[n]{A + \sqrt[m]{B'} + \sqrt[m]{C'}}, \text{ &c.}$$

ou l'on peut ſuppoſer le nombre des radicaux égal dans chacune, puiſque s'il en faut trois de plus, par exemple, on peut prendre A' & le faire égal à $A + \sqrt[m]{(B_{,} - A)^m} + \sqrt[m]{(B_{,,} - B')^m} + \sqrt[m]{(A' - B'')^m}$, ou bien ſuppoſer que deux ou trois de A, B, C, ſont zéro. Soit donc p le nombre des radicaux ſous le ſigne n, & r celui des radicaux ſous le ſigne m, on aura nr, B, C, &c. qui priſes r à r, donneront les valeurs des termes ſous le ſigne; donc nous aurons cette fonction de la forme ci-deſſus (n.° XI., XII., XIII., & XIV.) où ce que nous avons appellé n & p eſt le même, & $s = m^r$. Il en ſera de même des formes plus compliquées; il faut ſur-tout obſerver ici que ſouvent pour réduire à cette forme, il faut, comme l'on voit, la ſuppoſer beaucoup plus compliquée que celle ſous laquelle la fonction ſe préſente.

XX. Maintenant il reſte à prouver que la fonction ne peut avoir de dénominateur. Soit donc $\frac{\sqrt[n]{A} + \sqrt[m]{B} \ldots}{P}$ la valeur de la racine d'une équation où le coefficient de la plus haute puiſſance eſt numérique, & dont les racines ſont x, x', x'' &c. on aura $\frac{\sqrt[n]{A}}{P} = ax + bx' + cx''$ &c. a, b, c, étant numériques; or faiſant $y = ax + bx' + cx''$ &c. on aura y par une équation où auſſi la plus haute puiſſance aura un coefficient numérique & les autres entiers; donc $\frac{A}{P^n}$ ſera une fonction entière; mais $\frac{A}{P^n} = \frac{A' + \sqrt[m]{B'} + \sqrt[m]{C'}}{P^n}$;

donc $\frac{\sqrt[m]{B}}{P^n}$ sera une fonction entière, & par conséquent $\frac{B}{P^{mn}}$, & ainsi de suite; donc en général $\frac{\sqrt[n]{A}+\sqrt[n]{B}}{P}$ sera immédiatement divisible par P; donc on peut la supposer entière. Or il est aisé de voir qu'il doit être général que le coefficient de la plus haute puissance de y soit numérique, car ce coefficient ne dépend que du premier coefficient de la proposée, qu'on peut supposer l'unité, & du degré de l'équation, & est indépendant de tous les autres.

XXI. J'ai donc prouvé que l'on auroit toujours une méthode générale de trouver la racine d'une équation du degré, pourvu que cette racine fût d'une forme finie; mais le nombre des radicaux successifs & leurs exposans, restent indéterminés; d'ailleurs l'équation en x à laquelle on compare la proposée, est beaucoup plus élevée peut être qu'elle ne doit l'être. C'est donc à simplifier cette méthode, & à tacher de déterminer, s'il est possible, le nombre de degrés des radicaux, que je dois m'occuper maintenant.

ARTICLE II.

Nous examinerons quatre questions dans cet article. 1.° La manière dont l'équation produite par l'évanouissement des radicaux successifs & dont la racine est $\sqrt[n]{A}+\sqrt[n]{B}+\sqrt[n]{C}$, &c. peut se réduire à une équation rationnelle du n.e degré. 2.° Combien & quels radicaux sont nécessaires pour que cela soit possible. 3.° De la réduction & solution des équations en A, B, C. 4.° De la marche générale la plus simple qu'on puisse faire suivre à la méthode.

I. Soit l'équation dont la racine est $x=\sqrt[n]{A}+\sqrt[n]{B}+\sqrt[n]{C}$, &c. rationnelle du degré n, & soit p le nombre total des A, B, C, &c. il est clair que ce nombre doit être égal ou plus grand que

$n-1$. En effet, s'il étoit plus petit, soient x, x', x''.... les n racines de la proposée, nous aurions entre $n-1$ de ces racines une équation linéaire; ce qui est contre l'hypothèse, puisqu'on peut les supposer quelconques. D'où il suit que si les mêmes A, B, C, se trouvent dans chaque racine de l'équation, il faut que ces $n-1$ termes au moins se trouvent dans chacune.

II. Soit maintenant

$\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C}$, &c.

une des racines, les A, B, C, &c. étant au nombre de $n-1$, & appelons n, n', n'', n''', &c. les n racines de l'équation $y^n - 1 = o$, les n^{n-1} combinaisons différentes de ces racines donneront n^{n-1} racines de l'équation en x. Supposons que $\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C}$ &c. soit une racine de l'équation rationnelle en x, il faut que tout système de radicaux convenant à cette équation du degré n, soit assujetti aux conditions de l'article précédent. Le nombre total de systèmes de n racines est ici, $(n^{n-1}) = s$, $\frac{s \cdot s-1 \cdot s-2 \cdot \ldots}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}$; mais comme il n'est question que de ceux qui contiennent $\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C}$, &c. le nombre est réduit à $\frac{s-1 \cdot s-2 \cdot \ldots}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n-1}$. Maintenant 1.° tout système de ces $n-1$ radicaux, qui contiendroit un ou plusieurs des $n-1$ racines n', n'', n''', multipliant $\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B}$.... est exclus; donc il ne restera plus que $\frac{s-n \cdot s-n-1 \text{ \&c.}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n-1}$ systèmes. 2.° Il est aisé de voir que, si on divise $\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C}$, &c. en deux parties $P + Q$, le cas où le système des n racines contiendroit deux formules $n' P + n'' Q$, ou en le divisant en trois $P + Q + R$, ce système contiendroit trois formules $n' P + n'' Q + n''' R$, & ainsi de suite, doit être également exclus. 3.° Que soit $n' \sqrt[n]{A} + n'' \sqrt[n]{B} + n''' \sqrt[n]{C}$, &c.

une seconde racine, toute formule . . . . . ($n' \sqrt[n]{A} + n'' \sqrt[n]{B}$ &c.) × n' sera exclue ; or comme n^2, $n' n''$ &c. sont aussi des racines de l'équation $y^n - 1 = o$, la formule ($n' \sqrt[n]{A} + n'' \sqrt[n]{B}$ &c.) n' sera une des s racines ; ainsi cette observation exclut encore des racines de l'équation en x du degré n^{n-1} toute cette classe de racines, & ainsi de suite.

III. Mais sans chercher par ce moyen le nombre de systèmes répondant à la racine $\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C}$, &c. il est aisé de s'assurer qu'il n'y en a en général qu'un seul ; en effet, si $\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B}$, &c. appartenoit à deux systèmes de n racines d'équations rationnelles du degrè n, on auroit une équation rationnelle du degré $2n$ qui auroit deux racines égales ; donc différenciant, on aura la racine proposée, ou par une équation soit linéaire, soit inférieure au degré n ; ce qui est contre l'hypothèse ; ou par une équation du degré n ; or ce dernier cas supposeroit que l'équation en x du degré n^{n-1} a n racines égales deux à deux, a toutes les racines égales au moins deux à deux, ou plutôt les a toutes n à n, puisque n est en général le seul diviseur de n^{n-1}, donc l'équation en x du degré n^{n-1} seroit réductible en général à une rationnelle du degré moindre, ce qui est contre l'hypothèse.

IV. Il suit des mêmes principes que ci-dessus, que si $x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B}$ . . . . est la racine d'une équation du degré n, l'équation du degré n^{n-1} est formée par le produit de n^{n-2} équations du degré n, qui ne diffèrent de la proposée que parceque leurs coefficiens sont multipliés par d'autres nombres. Nous observerons ici que l'équation rationnelle en n, étant sous la forme

$$x^n + a^2 x^{n-2} + b^3 x^{n-3} + c^4 x^{n-4} \ldots + q^n,$$

les autres équations seront

$$x^n + A_1 a^2 x^{n-2} + B_1 b^3 x^{n-3} + (C_1 c^4 + D_1 a^4) x^{n-4} \text{ &c.}$$

mais si on avoit regardé l'équation

$x^n + A_1\ a^2\ x^{n-2} + B_1\ b^3\ x^{n-3} \ldots = o$,

comme étant la propoſée, l'équation

$x^n + a^2\ x^{n-2} + b^3\ x^{n-3} \ldots = o$,

ſeroit devenue

$$x^n + \frac{1}{A_1}(A_1\ a^2)\ x^{n-2} + \frac{1}{B_1}(B_1\ b^3)\ x^{n-3} + \frac{1}{C_1}\left(C_1\ c^4 + D\ a^4\right) - \frac{D}{CA^2}(A\ a^2)\ x^{n-4};$$

& ainſi de ſuite; & il n'y a pas lieu de ſavoir ſi en général on peut ſuppoſer à ces autres équations une forme plus ſimple.

V. Maintenant ſoit

$x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C} \ldots$

au nombre de p termes, nous aurons une équation en x du degré n^p. Suppoſons que $x^n + a^2\ x^{n-2} \ldots + q^n$, ſoit une équation rationnelle qui diviſe l'équation du degré $n^p\ a^2 \ldots q^n$ demeurant quelconques, il eſt aiſé de voir que ſi le nombre p eſt $n - 1$, on pourra avoir, en mettant pour x^n ſa valeur, une équation

$V\ x^n + V'\ x^{n-1} \ldots = o$;

que la multipliant par x, & ſubſtituant, on en a une ſeconde de la même forme, qui ſera

$Z\ x^n + Z'\ x^{n-1} \ldots = o$;

que multipliant la première par Z', on aura une équation

$VZ' - V'Z\ x^n + V''Z' - Z''V\ x^{n-2}$ &c.

ou mettant pour x^n ſa valeur, on aura $n - 1$ équations pour déterminer les $n - 1$ quantités indéterminées; donc il faut toujours ſuppoſer qu'il y a un nombre d'A, B, C, &c. En effet, ſi on le fait plus petit, il y a trop d'équations de comparaiſon, & ſi on le fait plus grand, il reſtera des valeurs indéterminées. Il ſuit de là que la formule qui renferme $n - 1$ radicaux indéterminés dans la même racine, eſt la ſeule qui puiſſe convenir.

VI.

VI. Supposons maintenant que sous le signe $\sqrt[n]{}$ il se trouve des fonctions de radicaux successifs, en sorte que le radical d'un degré quelconque ne contienne qu'une seule fonction sous lui, ou des fonctions composées des mêmes radicaux, il est aisé de voir qu'il faudra $n-1$ radicaux successifs.

VII. En effet pour que l'équation

$$x^n + a^2 x^{n-2} \ldots\ldots + q^n = o$$

ait une racine

$$x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C} \text{ &c.}$$

il faut que parmi les AB, AC, &c. il y ait un terme qui devienne $\overline{P+Q}^n$ en sorte que P soit rationnel, & Q tel que la somme de toutes les quantités semblables qui se trouvent dans le terme formé par les produits des $A, B, C \ldots\ldots$ sous le signe $\sqrt[n]{}$, & qui doit être égalé à a^2, que la somme, dis-je, de tous ces termes soit nulle. Mais pour que $A\,B$ ait cette propriété, sans que A soit de la même forme, il faut que faisant

$$A = A' + \sqrt[m]{B'} + \sqrt[m]{C'} \text{ &c.}$$

& $B = A' + a\sqrt[m]{B'} + b\sqrt[m]{C'}$, &c. ($a$ & b sont des nombres) on ait ou $B'C' = \overline{P'+Q'}^m$ ou $B\,B' = \overline{P+Q}^n$, & ainsi de suite; en sorte qu'il faudra que dans les radicaux successifs il y en ait un quarré: on prouvera de même qu'il faudra qu'il y ait un radical troisième, un radical quatrième, ou un nouveau radical quarré, un radical cinquième, &c. & ainsi de suite jusqu'au radical n qui n'est pas nécessaire, puisque le dernier terme contient A, B, C, &c. au premier degré, ainsi il n'y a aucun besoin que A contienne des radicaux plus élevés; mais cela ne prouve pas qu'il n'en puisse contenir.

VIII. Maintenant supposons que $x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C}$ &c. les A, B, C, &c. étant au nombre de $n-1$, soit la ra-

cine de l'équation du degré n ; M.r de la Grange a prouvé qu'en général si n est un nombre premier, l'équation en A sera réductible au degré $1 . 2 . 3 . . . . n - 2$; & que si n est un nombre qui ait des diviseurs, elle sera réductible si m est un diviseur premier ; ensorte que $n = m n'$ au degré $\frac{1 . 2 . . . . . n}{1 . 2 . 3 \ldots m . 1 . 2 . 3 \ldots . n'} m$; donc si m & n' sont des nombres premiers, elle le sera aussi au degré $\frac{1 . 2 . 3 . . . . . n}{1 . 2 . . . . m^{n'} . 1 . 2 . 3 . . . n'}$, c'est-à-dire, réductible, en supposant $m < n'$ également à une équation du degré $\frac{1 . 2 . 3 . . . . . n}{1 . 2 . 3 . . . . m^{m+1} . \overline{m+1 . m+2 \ldots n'}} m$, ou à une équation du degré $\frac{1 . 2 . 3 . . . . n}{1 . 2 . 3 . . . . m^{n'+1} . m+1 . m+2 \ldots n'}$, ou, ce qui est la même chose, à une équation du degré $\frac{1 . 2 . . . . . n}{1 . 2 . 3 . . . m^{m+1} . \overline{m+1 . m+2 \ldots n'}} \times \frac{1}{1 . 2 . 3 . . . m^{n'-m}}$, ou à une du degré $\frac{1 . 2 . . . . n}{1 . 2 . 3 . m^{m+1} . \overline{m+1 . m+2 \ldots n'}} \times \frac{1}{m+1 . m+2 \ldots n^m}$, & par conséquent réductible à une du degré $\frac{1 . 2 . . . . n}{1 . 2 . 3 . . . m^{n'+1} . \overline{m+1 . . . n'}^m}$.

IX. Si l'on examine maintenant la forme de ce dernier nombre, on trouvera qu'en général l'équation en A n'est réductible qu'à une équation dont le degré est un produit de nombres plus petits que n, mais lui-même plus grand que n ; & l'on verra que si on traite cette équation réduite comme la proposée, on parviendra à une réduite d'un degré encore plus élevé, & ainsi de suite. Mais si l'on ne peut espérer, par ce moyen, de parvenir à une équation toujours de plus en plus rabaissée, on peut être sûr, cependant, qu'en la répétant un nombre de fois

ſuffiſant, on parviendra à une équation rationnelle. En effet, ſuppoſons que la dernière équation réduite ſoit du degré $m' n' p'$ &c. m', n', p' &c. étant des nombres $< n$, que nous ſuppoſions l'inconnue x' de cette équation miſe ſans ſecond terme, & que nous faſſions

$$x^{1} = \sqrt[m' n' p' \&c.]{A^{1}} + \sqrt[m' n' p]{B^{1}} \text{ \&c.}$$

au nombre de $m' n' p^{1} \ldots - 1$; il eſt aiſé de voir que les fonctions A', B', C' contiennent un moindre nombre de radicaux ſucceſſifs que la valeur de x'; & qu'ainſi en continuant toujours de même, on parviendra, ſi la propoſée a une racine exprimable en termes finis, à une équation dont la racine ſera rationnelle. Mais juſqu'ici on n'a pas encore pu parvenir à déterminer combien d'équations ſucceſſives en x', x'', &c. on auroit à réſoudre auparavant.

X. Il eſt au moins très-vraiſemblable que cette manière générale de réſoudre l'équation en x' du degré $m' n' p' \ldots\ldots$ eſt trop générale. En effet cette manière feroit dépendre la ſolution de la propoſée de radicaux qui auroient pour expoſans des nombres premiers contenus entre $m' n' p' \ldots$ & n ; or ces radicaux ne doivent pas être contenus dans la racine d'une équation du degré n. Suppoſons donc que

$$x' = \sqrt[m' n' p' \ldots]{A'} + \sqrt[m' n' p']{B'} \text{ \&c.}$$

les A', B', C' &c. étant au nombre ſeulement de $m' - 1$, ou $n' - 1$, ou $p' - 1$ termes, &c. il eſt aiſé de voir 1.° que ſi l'expoſant $m' n' p' \ldots$ du radical a été ſuppoſé trop grand, & qu'il ne doive être que m', n', p', &c. nous aurons une équation en A', telle que la même équation ſeroit auſſi rationnelle pour $A'^{\frac{1}{n' p' \ldots}}$ $A'^{\frac{1}{m' p' \ldots}}$, & ainſi de ſuite. Ainſi dans ce cas l'équation en A' ne contiendra que des puiſſances $n' p' \ldots$ ou $m' p' \ldots$ 2.° que ſi le nombre des A', $B' \ldots$ n'eſt que $m' - 1$, on aura par

les principes employés par M. de la Grange, l'équation en A', du degré $(m' n' p' \ldots) \cdot (m' n' p' \ldots - 1)$ jusqu'à $m' n' p' \ldots - m'$ degré qui s'abaissera par des réductions de la manière que M. de la Grange l'a enseigné. 3.° que si on avoit au contraire pris $\sqrt[m']{A'} + \sqrt[m']{B'}$ &c. au nombre de $m' - 1$, & que c'eût été le radical $\sqrt[m'n'p'\ldots]{\ }$ qu'il eut fallu prendre, l'équation ayant été trouvée en A', on auroit, en mettant au lieu de A', $Z^{\frac{1}{n' \cdot p' \cdots}}$ à cause de $Z = A^{n'p'} \ldots$ une équation en Z d'où le radical aura disparu; ce qui prouve que l'on peut sans inconvénient faire l'une ou l'autre supposition; 4.° que si le nombre des $m' - 1$, $n' - 1$ &c. est plus petit que ne doit être celui des fonctions, nous aurons, (en ne substituant dans l'équation du degré $x^{m'^{m'-1}}$ que les valeurs de $x^{m'n'p'}$.....) $m' n' p' - 1$ équations entre $m' - 1$ variables qui nous serviront à voir si la supposition est légitime, & à avoir dans ce cas pour A', B' &c. les équations du plus petit degré possible. On voit aisément que si m' est le plus grand des facteurs $m'n'p'$, on aura presque toujours $m'^{m'-1} > m'n'p' \ldots\ldots$ & si on prend $\sqrt[m'n']{\ }$ ou $\sqrt[m'n'p']{\ }$ & ainsi de suite, on parviendra toujours à une équation en A' B' &c. x' qui sera d'un degré plus élevé que l'équation proposée. Au reste, si au lieu de supposer que toute racine de l'équation du degré $m' n' p' \ldots$ est de la forme $\sqrt[m']{A'} + \sqrt[m']{B'}$ au nombre $m - 1$, on supposoit que ces deux équations n'ont que m' racines communes, on trouveroit toujours autant d'équations pour déterminer A', B', qu'il y auroit de ces quantités; mais la méthode ci-dessus me paroit plus propre à abaisser le degré de l'équation en A', autant que cela sera possible.

XI. Soit la propoſée du degré n, que je ſuppoſe $x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} \ldots\ldots$ au nombre de $n-1$ termes, que je faſſe évanouir tous ces radicaux, j'aurai une équation du degré n^{n-1} qui ſera diviſible par la propoſée. Suppoſons la diviſion faite, & le reſte égal à zéro, les équations de condition donneront les valeurs que doivent avoir $A, B, C,$ &c. pour que la racine hypothétique ſoit celle de la propoſée; donc toute valeur de $A, B, C \ldots$ qui ſatisfera à la condition, donnera une valeur de la racine de la propoſée. Suppoſons que l'élimination ſoit faite, & que nous aions C donné par une équation en A, B, C; B par une équation en A, B; & A par une équation du degré n', il eſt clair qu'à chaque racine de l'équation en A, répondront certaines valeurs de B, de C, & au moins une racine de la propoſée; mais ces racines ne peuvent être qu'au nombre de n; donc ſoient

$A, B, C \ldots\ldots\ldots n-1$ de ces racines;
$A' B' C' \ldots\ldots\ldots n-1$ autres;
$A'' B'' C'' \ldots\ldots\ldots n-1$ autres;

& ainſi de ſuite, leſquelles repréſentent n racines de la propoſée, les autres racines de l'équation en A ne pourront être que quelques-unes de ces $n-1 . n$ racines; donc l'équation en A ſera néceſſairement réductible à une équation de ce degré, qu'on voit devoir ſe réduire à une du degré $m-1$. Cette réflexion ſuppoſe que ſi $\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} \ldots.$ & $\sqrt[n]{C} + \sqrt[n]{D} \ldots\ldots$ ſont des valeurs d'une même racine de l'équation en n, aucun de ces radicaux n'étant rationnel, il faut que $C = A$, ou $= B$ & $D = B$ ou $= A$. Si donc on ſuppoſe en général l'équation en A, telle qu'étant données $n . n-1$ valeurs de A, ou même $n-1$, les autres racines ſoient égales à ces mêmes valeurs de A, multipliées par des nombres, ou à la ſomme d'un certain nombre de ces valeurs multipliées par des coefficiens numériques,

on pourra trouver un moyen de rabaiſſer l'équation en A.

XII. Généralement après avoir trouvé l'équation en A, il faudra (le degré de l'équation en A étant $p^t q^m r^s \ldots$.) rechercher ſi cette équation n'eſt pas d'une forme telle que prenant

$$A^p + A' A^{p-1} + B' A^{p-2} \ldots = 0;$$
ou $$A^q + A' A^{q-1} + B' A^{q-2} \ldots = 0;$$
$$A^r + A' A^{r-1} + B' A^{r-2} \ldots = 0;$$

&c.

on ait A' par une équation du degré $p^{m-1} q^t r^s$ &c. ou $p^m q^{t-1} r^s$ &c. & en traiter de la même manière les équations en A', juſqu'à ce qu'on parvienne à une équation non reductible. Soit cette équation encore du degré $p^{m'} q^{n'} r^{s'} \ldots$. on ſuppoſera que ſa racine (le ſecond terme ayant été détruit) ſoit $A' = \sqrt[p]{A''} + \sqrt[p]{B''}$ au nombre de $p^{m'} - 1$ termes; & ayant trouvé (n.° X.) l'équation en A'', ſi elle eſt poſſible, on la traitera comme on a traité l'équation en A, & ainſi de ſuite. Si cela n'étoit pas poſſible, il faudroit eſſayer la ſuppoſition de $A' = \sqrt[pq]{A''} + \sqrt[pq]{B'} \ldots\ldots$ au nombre de $p^{m'} q^{n'} - 1$, & continuer ainſi juſqu'à ce qu'on ait une équation en A''. Par ce moyen, toutes les fois que la propoſée aura une racine finie, on parviendra à la fin à une équation rationnelle, & le problême ſera réſolu.

XIII. Nous obſerverons ici que nous avons deux eſpèces de réductions à conſidérer; l'une eſt celle dont nous venons de parler, & l'autre eſt numérique pour ainſi dire; c'eſt lorſque, ou la propoſée ne contient que des puiſſances $x^{n'} \ldots$ ce qui fait que l'on a (faiſant $z = x^{n'}$) les valeurs de x en z par la ſolution de l'équation numérale $y^n - 1 = 0$; ou bien lorſque la propoſée du degré n' eſt diviſible par une équation du degré $m' < n'$, les coefficiens de cette nouvelle équation étant rationnels

quant aux fonctions algébriques. Il faudra donc examiner d' abord si les équations réduites qui servent à la solution du problême ne sont pas susceptibles de ces réductions. La seconde espèce de réduction est algébrique, c' est celle où l' on suppose qu' une équation du degré pq, par exemple, est telle que l' on puisse y substituer une équation du degré p, dont les coefficiens soient donnés par une équation du degré q, ou réciproquement ; & comme nous l' avons dit dans le mémoire précédent, il ne faut jamais tenter la solution d' une équation par la substitution de la forme $x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} \ldots$ que l' on n' ait examiné toutes les réductions dont elle peut être susceptible, toutes les fois que le nombre des coefficiens algébriques indéterminés de l' équation est plus petit que l' exposant de degré diminue d' une unité.

XIV. Nous avons donné dans le premier article de ce mémoire, la manière d' avoir en général une équation rationnelle en x, A, B, C, lorsqu' on a $x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} \ldots$. Supposons que nous ayons cette équation du degré n^{n-1}, nous la pouvons supposer être identique au produit de n^{n-2} équations

$$x^n + a^2 x^{n-2} \ldots + g^{n-2} x^2 + h^{n-1} + q^n = o;$$

$$x^n + p a^2 x^{n-2} \ldots \ldots$$

$$+ p_{,} q^n + p_{,,} a^2 q^{n-2} = o;$$

où les coefficiens $p_{,}, p_{,}, p_{,,}$ sont des nombres, ou bien identique à

$$x^n + a^2 x^{n-2} \ldots \ldots + q^n,$$

multipliée par

$$x^{n^{n-1}-n} + p a^2 x^{n^{n-1}-n-2}, \text{ \&c.}$$

Cela posé, nous avons trouvé ci-dessus que le coefficient de $x^{n^{n-1}-n}$ étoit dans l'équation en x, A, B, C, &c. de la forme $M.\overline{A+B+C}$ &c. que celui du terme suivant étoit $N.\overline{A+B+C}^2 + N'$ (le produit des A, B, C, &c.

deux à deux;) celui du terme suivant égal à $P.\overline{A+B+C\ldots}^{3} + P'.\overline{A+B+C\ldots}$ (le produit des A, B, C, &c. deux à deux) $+ P''$ (le produit des A, B, C, &c. trois à trois) & ainsi de suite. Donc égalant ces valeurs aux termes correspondans de l'équation en x, a^2, b^3, &c. & laissant les coefficiens numériques indéterminés, on aura des valeurs rationnelles; 1.° de $A+B+C$, &c. 2.° du produit des A, B, C, &c. deux à deux; 3.° du produit des A, B, C, &c. trois à trois, & ainsi de suite; donc on aura une équation en A, ou B, &c. rationnelle quant aux quantités algébriques & du degré $n-1$.

XV. Les seules choses qui pourroient empêcher cette conclusion, seroient 1.° si l'on avoit un coefficient de l'équation en x, A, B, C, &c. pour le terme $x^{n^{n-1}-nm}$, qui ne contint point le produit convenable des A, B, C, &c. pris m à m. Ce dont il est aisé de s'assurer d'après le premier article, & cela n'exige qu'un calcul que tout le monde peut faire. 2.° S'il arrivoit que les coefficiens numériques des termes de l'équation ci-dessus du degré $n-1$, fussent $\frac{0}{0}$, ce qui est plus difficile à constater en général.

XVI. Si aucun de ces inconvéniens n'a lieu, alors on aura par ce moyen l'équation littérale réduite par une voie très simple, & pour la détermination des coefficiens numériques p, p_1 p'_1, &c. (n.° XII.) comme on a les coefficiens des termes au delà de $x^{n^{n-1}-\overline{n+n-1}}$ donnés & coefficiens des termes précédens, on aura immédiatement les équations de condition, en formant ces termes & égalant à zéro le coefficient de chaque terme en a^2, b^3, &c.

XVII. Il seroit donc très utile d'avoir des formules générales & abrégées pour calculer les fonctions homogènes de a^2, b^3, c^4, ... q^n, auquel le problême proposé conduit à chaque instant.

XVIII.

XVIII. D'abord, soit $n-1$ le nombre des $a^2, b^2, \ldots . q^n$, & $n' = m\,n + p\;p < n$ le degré de la fonction homogène cherchée, nous aurons le nombre T des termes de la fonction homogène égal à ce que devient T, en y mettant pour n, $n-1$, plus ce que devient T en mettant pour n, $n-1$, & pour n', $n'-n$, plus ce que devient T en mettant pour n, $n-1$, & pour n', $n'-2\,n$, & ainsi de suite, jusqu'à ce que devient T, en y mettant p au lieu de n & de n'. (Mais il ne s'agit pas ici de développer cette théorie, non plus que la manière d'avoir les coefficiens de chacun des termes; ce qui dépend de la théorie des combinaisons.)

XIX. Connoissant en général la manière de former ces fonctions homogènes, on résoudra ce problême: étant donnée une équation dont les coefficiens soient de cette forme & une proposée; savoir si supposant ces coefficiens numériques indéterminés, la forme hypothétique ne résout pas la proposée. On pourra y parvenir par la méthode des coefficiens indéterminés, & on aura les équations de condition entre les coefficiens, si on fait former les fonctions de l'article précédent.

XX. Pour cela on cherchera d'abord une proposée $x^{n'} + a\,x^{n'-1} + b^c x^{n'-c} \ldots \ldots$ étant données les équations de condition pour qu'elle ait pour racine les n racines de $x^n + a\,x^{n-1} \ldots .$ en supposant a' ou a connus à volonté. Cela posé, on prendra telle hypothèse qu'on voudra pour la forme de la racine cherchée, & faisant disparoître les radicaux & comparant terme à terme, on aura les équations de condition entre les coefficiens numériques, pour que cette forme soit celle de la racine proposée; ou bien, si au lieu de la forme de la racine cherchée on prendra seulement $x = \sqrt[v]{A} + \sqrt[v]{B} \ldots . A$ & B pouvant être irrationnels, on aura les équations en A, B. Ces équations en A, B, &c. sont alors en bien plus grand nombre que les A, B, &c. mais cela ne peut

ſervir à abaiſſer le degré des équations en A, B, parceque les coefficiens numériques doivent être tels que ces équations ſe réduiſent à $n-1$; mais cependant ſi on doit avoir des équations d'un degré moindre en n'ayant égard qu'aux fonctions algébriques, on les trouvera par ce moyen. En effet il n'y aura qu'à ſuppoſer dans toutes ces équations A, B, C, &c. . . . données par une équation du degré m, par exemple, le même pour toutes, on aura, 1.° le degré de cette équation & la forme de ſes coefficiens en a^2, b^2, &c. 2.° les équations en A, B, C, &c. les contenant d'une manière ſemblable, on aura toutes ces équations en valeurs de ces coefficiens, & par conſéquent immédiatement les équations de comparaiſon entre les coefficiens. Si on veut examiner ſi l'équation en A, B, &c. eſt réductible, ou non; on prendra ces différentes hypothèſes, & on comparera de même ſans avoir beſoin d'élimination.

Ceci pourroit donner lieu à des développemens plus étendus, que je ſupprime, mais auxquels je me livrerai ſi les géomètres trouvent que ces recherches méritent d'être ſuivies.

ARTICLE III.

Il ne me reſte plus maintenant pour remplir le plan que je me ſuis propoſé, qu'à examiner la poſſibilité ou la non poſſibilité de la réduction à l'indéfini de toutes ces équations. J'y ajouterai quelques remarques ſur l'élimination & ſur la manière la plus ſimple de la faire.

1. Si d'abord nous examinons les remarques de M.r De la Grange, nous trouvons que la méthode générale ne nous conduit qu'à des réduites toujours plus élevées que la propoſée, lorſqu'elle eſt du 5.e 7.e 8.e degré, &c. car il me paroit d'après les recherches de M.r De la Grange, & de M.r Vandermonde, qu'on peut regarder celle du 6.e comme ſe réduiſant au cinquième.

II. Si on examine les remarques du premier article de ce mémoire, & que produisant par le moyen d' une des formes quelconques de radicaux, une équation du degré p, on suppose que cette équation soit le produit d' une équation rationnelle du degré $p - n$ par une du degré n; il est clair que le nombre de termes en a^2, b^3 .... q^n dont les coefficiens numériques sont indéterminés, est égal, 1.° au nombre des termes semblables dans une équation du degré $p-n$. 2.° au nombre de ces termes qui entrent dans la forme hypothétique; & que celui des équations de comparaison est celui de tous les termes qui entrent dans une équation du degré p; en sorte que ce nombre surpasse celui des coefficiens indéterminés de celui du nombre des termes contenus dans n fonctions de a^2, b^3 .... du degré p, $p-1$ .... $p-n+1$ moins celui des mêmes termes dans des fonctions du degré $n, nn', nn'n''$ .... $nn'n''$ ... $n'^{\cdots m-1}$ au nombre de m, m étant le nombre des radicaux successifs, & n, n', n'' ... $n'^{\prime\prime-m-1}$ leurs exposans. Or ce nombre est toujours positif. Donc en général le nombre des équations surpassera toujours celui des coefficiens indéterminés.

III. Ces deux réflexions ne suffisent pas pour assurer la non possibilité de la solution générale, ni même pour prouver qu' on ne puisse démontrer cette possibilité. Examinons donc les moyens de s' en assurer.

IV. Nous avons d' abord l' abaissement de l' équation du degré p (N.° II.). Cette équation n' est pas l' équation générale du degré p; elle ne contient qu' un nombre plus petit de coefficiens indéterminés, elle est donc susceptible d' abaissement, & il est clair que si on prouve que cette équation est réductible algébriquement (les coefficiens numériques restant irrationnels) à une équation telle que le nombre des équations ne surpassât point celui des coefficiens, le problême seroit résolu; & si cela n' est pas encore possible en général, cette considération peut du moins servir à diminuer l' excès du nombre des conditions sur

celui des coefficiens indéterminés. On pourroit diminuer encore la difficulté en considérant d'abord une équation du degré $p-n$ multipliée par $x^n + a^2 x^{n-2} + b^3 x^{n-3} \ldots\ldots + q^n$, & telle qu'il n'y ait dans le produit que des puissances n, & en examinant ce qui reste de termes indéterminés. On supposeroit de même, comme cela suit de la disparition successive des radicaux inférieurs sous les signes n', n'', que l'équation est formée semblablement des puissances n', n'', &c. & il est très possible que sous ce point de vue, l'excès du nombre des conditions soit encore diminué.

V. En attendant que ces calculs soient exécutés, voici toujours une méthode de s'assurer de la possibilité du problême. Soit (article 2.) l'équation réduite autant qu'elle peut l'être & du degré m, p, q, r; ces nombres étant premiers & moindres que n, s'essaie la solution de cette équation par la même méthode que la proposée & je cherche une autre réduite. J'examine le degré le plus bas où elle s'abbaisse : si ce degré a pour diviseurs premiers des nombres plus grands que ceux qui formoient le produit par lequel le degré de la proposée étoit exprimé, ou des nombres égaux à n, ou plus grands, on pourra regarder la solution comme impossible, sinon on pourra la regarder comme possible. Continuant, on observera si dans chaque réduite le nombre des termes dont le produit forme le degré de l'équation, ne diminue pas, quant au nombre soit des produisans, soit quant à leur degré.

VI. Si on rapproche de ceci ce que j'ai dit, (article 1.er N.os 14. & suiv.) on verra que chaque opération qu'on fait pour chercher les réduites, tend à débarrasser d'un radical ; on verra également pourquoi les équations se présentent sous un degré plus élevé que le produit des radicaux successifs ou leurs puissances, pourquoi ce degré pourroit être le produit du nombre premier plus grand que n, comment enfin il doit toujours pouvoir se rabbaisser au dessous.

VII. Je finis par quelques réflexions sur l'élimination. L'introduction à l'analyse de l'infini de M. Euler renferme d'excellens principes sur cette matière ; c'est d'après lui que je vais procéder ici.

VIII. Quel que soit un m nombre d'équations entre m variables x, y, z, u . . . . si je veux avoir une équation déterminée en une seule variable, il est clair que, quelque méthode que je prenne, l'équation déterminée en x, par exemple, sera une fonction de x égalée à zéro; & si $A = 0$, $A' = 0$, $A'' = 0$, &c. sont les équations proposées, cette fonction de x purs sera $AB + A'B' + A''B''$ &c.

IX. B, B', B'', seront des fonctions entières toutes les fois que l'on n'aura point d'équation en y, z, u . . . . Satisfaisant aux équations

$$A = 0, \quad A' = 0, \quad \&c.$$

indépendamment de x. Dans ce cas, si on veut avoir x, il faut supposer à B, B', B'', &c. un dénominateur.

X. Supposons donc que l'on cherche l'équation la plus simple rationnelle en x, qui satisfasse aux équations $A = 0$, $A' = 0$, $A'' = 0$, &c. il n'y aura qu'à les multiplier par les fonctions, si m est le degré de ces équations

$$\frac{C}{D}, \quad \frac{C'}{D}, \quad \frac{C''}{D}, \quad \&c.$$

les C étant des fonctions entières du degré u, & D du degré $n + m - 1$, tout au plus. Prenant au lieu de chaque C & de D, des séries indéfinies, multipliant & supposant $\frac{AC}{D} + \frac{A'C'}{D}$, &c. une fonction entière de x, & l'egalant à zéro, on aura l'équation cherchée ; & supposant successivement pour chaque degré des fonctions C, celui des D, le plus grand qu'il est possible.

XI. Si on cherche au contraire l'équation en x la plus élevée qu'il est possible, toujours en supposant qu'on n'admette point de racines inutiles, il faut, en suivant la

même opération, prendre pour les C, comme pour la quantité D, le plus petit degré qui puiſſe réuſſir.

XII. Toutes les fois que l'on n'a aucune valeur de y, z, u, &c. indépendantes de toute valeur des x, on aura par cette manière la valeur des coefficiens de l'équation en x, en réſolvant des équations linéaires ; & comme il eſt aiſé de voir en général la forme de ces équations, on ſubſtituera immédiatement aux équations à éliminer un ſyſtème d'équations linéaires. Cela peut être d'une grande utilité dans la pratique.

XIII. Il y a maintenant deux cas à conſidérer; 1.° celui où s'arretant à un degré pour les valeurs des C, le nombre de ces équations linéaires eſt plus grand que celui des coefficiens indéterminés. Dans ce cas, la ſolution n'eſt poſſible que lorſque les coefficiens des équations propoſées ont entre eux certaines conditions. 2.° Lorſque dans la même hypothèſe le nombre des coefficiens eſt plus grand ou égal à celui des équations. Il ſemble qu'alors on devroit conclure qu'en général la ſolution eſt poſſible ; mais il faut obſerver qu'il faut que le ſyſtème ne puiſſe pas ſe diviſer en deux autres dans l'un deſquels le nombre des indéterminées ſoit plus petit que celui des équations. Par exemple, ſoit $m + n$ le nombre total des équations, $p + q$ celui des indéterminées, & $p + q > n + m$. Si p de ces indéterminées ſe trouve n'entrer que dans n équations, & que $p < n$, on voit que l'élimination n'eſt pas poſſible, tant que les facteurs C ne ſeront pas plus élevés.

XIV. Si les équations ſe trouvent réellement en moindre nombre que les coefficiens, il y a une remarque importante à faire. Il peut arriver que la fonction $AC + A'C' + A''C''$, &c. qui devient une fonction entière de x par l'hypothèſe, ſe trouve monter à un même degré, quelques coefficiens de C, C', C'', &c. reſtant arbitraires. Dans ce cas, comme la véritable équation en x ne doit pas en contenir, il eſt aiſé de voir que pour avoir cette équa-

tion, il faut chercher le diviseur le plus élevé de la fonction $AC + A'C' + A''C''$, &c. qui ne contienne pas de coefficiens arbitraires, & ce diviseur sera l'équation cherchée.

XV. On aura donc toujours dans ce cas l'équation la plus simple. La même chose aura lieu pour celui où l'on suppose que les C peuvent avoir un dénominateur; mais alors on peut réduire les opérations à la solution d'équations linéaires.

XVI. On voit en général que quelque méthode que l'on choisisse pour avoir une équation en x, on aura toujours la fonction.

$$AC + A'C' + A''C'' \text{ &c.} = 0,$$

qui répond également aux systèmes d'équation

$$A = 0, A' = 0, A' = 0 \ldots .$$
$$A = A' = 0, C'' = 0 \ldots .$$
$$A = C' = 0, A'' = 0 \ldots .$$

& autant de systèmes qu'on pourra former de la même manière; & il faut pour que $AC + A'C' + A''C''$ &c. soit la fonction de x, la moins élevée possible, que ces systèmes aient absolument le même nombre de valeurs de x qui y satisfassent. Hors de ce cas, quelque méthode d'élimination que l'on choisisse, elle conduiroit toujours à une équation plus élevée qu'elle ne doit être.

On trouvera toute la théorie de l'élimination développée d'une manière très savante dans un mémoire présenté par M. Bézout à l'Académie Royale des Sciences de Paris, & qu'elle publiera dans le volume de ses mémoires pour l'année 1773.

XVII. Par la méthode suivante, dont la marche est très simple, on pourra parvenir à trouver la racine cherchée de toute équation déterminée.

Soit une équation du dégré m sans second terme, on prendra x égal à $-$, $(a + b + c + d \ldots)$ au nombre de $m - 1$ & on comparera à la proposée, terme à terme, le produit de $x + a + b + c$ &c. $\times x + n\,a + n^{1}\,b + n^{11}\,c$ &c. $\times x + p\,a + p'\,b + p''\,c$ &c.... & ainsi de suite, les n les p, &c.

n' étant que des nombres qu'on déterminera par la condition, 1.° que (à cauſe du 2.d terme qui manque, & qu'on ne doit pas avoir d'équation linéaire entre les a, b, c &c.) l'on ait $1 + 2 + n' + n'' \ldots = o$ $1 + p + p' + p'' \ldots = o$, & ainſi de ſuite. 2.° Que l'équation définitive en a qu'on aura, après avoir éliminé b, c &c. ne contienne que des puiſſances multiples de m de la quantité a, ou ſi m a des diviſeurs m', m'', &c. des puiſſances multiples de m', ou de m' m''.

Enſuite on ſubſtituera au lieu de a, $z = a^n$; on fera diſparoître le ſecond terme, & on traitera l'équation en z' comme la propoſée, en obſervant de déterminer alors les nouveaux coefficiens numériques n_1 p_1 &c. par les deux conditions ci-deſſus, & par cette troiſième condition que l'équation que l'on aura en a', $z' = -(a' + b' + c' \ldots)$ ait, s'il eſt poſſible, un facteur rationel ; & on aura ſoin, lorſque cela arrive, de prendre pour n_1 p_1 &c. les valeurs qui rendent le degré de ce facteur le plus petit poſſible ; & ſi $a'^{m'^{n'}}$ eſt la puiſſance de a' dont il ne doit ſe trouver que les multiples de l'équation, on cherchera les valeurs de u' p' qui rendront m' le plus grand poſſible. On réſoudra l'équation en $a'^{m'}$ comme l'équation en z l & ainſi de ſuite.

Par ce moyen à chaque opération on fera diſparoître un des radicaux qui entrent dans la forme de la racine de l'équation, & l'on aura le double avantage de donner à z' la forme qu'il doit avoir rigoureuſement & indépendamment de toute hypothèſe ; & ſi cette forme eſt trop compliquée, d'éviter les embarras qui pourroient naître de cette complication ſuperflue.

On aura donc, par là, la racine toutes les fois qu'elle eſt poſſible ; & ſi elle ne l'eſt pas toujours (ce qui me paroit très-peu vrai-ſemblable) on découvrira ſon impoſſibilité par celle de la réduction de l'équation en $a'^{m'}$ ou des ſuivantes.

ERRATA DANS LA PARTIE MATHEMATIQUE.

Pag. 17. *l.* 1. $\frac{\delta z}{dy} + a\frac{dz}{dy}$ *liſés* $\frac{\delta x}{dx} + \frac{a\,dz}{dy}$

Pag. 17. *l.* 13. q & φ'; *liſés* φ & φ';

Pag 20. *l pen.* des révolutions *liſés* de révolution

Pag. 35. *l.* 11. donc l'equation eſt *liſés* dont l'equation eſt

Pag. 35. *l.pen.* les ordonnées PM & PM *liſés* QM & PM

Pag. 37. *l.pen.* en x' en x' & y' *liſés* en x' & y'

Pag. 41. *l.* 9. de la fonction $'$ *liſés* de la fonction φ'

l. 14. $\zeta = \varphi`(b\,x - y)$ *liſés* $\zeta = \varphi`\,(b\,x - y')$

Pag. 43. *l.* 21. $K\,m''$ *liſés* $K\,m'''$

l. 23. dans W *liſés* dans $`W$

l. 25. $V = a$ *liſés* $`V = a$

Pag. 47. *l.* 14. $P\,h = W'$ *liſés* $P\,h = `W$

l. 20. $W' = u$ *liſés* $`W = u$

l. 22. $A\,I = W$ *liſés* $A\,I = `W$

Pag. 49. *l.* 2. x' & $y`$ *liſés* x' & y'

Pag. 53. *l.* 14. $\varphi = \frac{b-c}{c\,v}p + \frac{q}{c}c\,v$ *liſés* $\frac{b-c}{c\,v}p + \frac{q}{c} - c\,v$

l. 17. $\frac{q\,y}{c}\ c\,y$ *liſés* $\frac{q\,y}{c} - c\,y$

Pag. 57. *l.* 22. $\varphi`\,u$ *liſés* $\varphi'\,u$

Pag. 62. *l.* 4. $W' = x\,(b+1)$ *liſés* $W'' = x\,b + 1$

Pag. 66. *l.* 9. $\varphi\,u = F\,(f.a) - h - al$ *liſés* $= F\,(f.a) - h - Al$

l. 26. point de conſtruction *liſés* point de contradiction

Pag 80. *l.* 16. le frottement des menſes *liſés* des meules

Pag. 82. *l.* 16. $x^2\frac{\delta^3\zeta}{dx^2} = d\,V$ *liſés* $x^2\frac{\delta^3\zeta}{dx^2} = \delta\,V$

Pag. 94. *l.ult.* $\frac{dy}{y^m}\ \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ *liſés* $\frac{\Upsilon\,dy}{y^m}\ \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$

Pag. 98. *l.* 4. $+ x^{m-2}\,F\left(\frac{x}{y}\right)$ *liſés* $+ x^{m-2}\,F'\left(\frac{x}{y}\right)$

*Pag.*99. *l.*18. $+\phi'\left(\frac{x}{y}\right)\int^{m'}\frac{\Upsilon dy^m}{y^n}$ *lisés* $+\phi'\left(\frac{x}{y}\right)\int^{m'}\frac{\Upsilon dy^m}{y^m}$

*Pag.*105. *l.*4. la constante a qui se trouve *lisés* la constante *a*

*l.*10. $x\frac{\delta z}{dx}y+\frac{dz}{dy}$ *lisés* $x\frac{\delta z}{dx}+y\frac{dz}{dy}$

*Pag.*116. *l.*6. $\int\frac{\Upsilon dy}{P+y}$ *lisés* $\int\frac{\Upsilon dy}{y^{P+1}}$

*Pag.*116. *l.* 17. empoyé *lisés* employé

*Pag.*117. *l.*18. 19. que si l'on avoit en $K=0$ *lisés* que si l'on avoit eu $K=0$

*Pag.*126. *l.*19. 20. si on nomme à la hauteur *lisés* si on nomme *a* la hauteur

*l.*21. $f\,sin.\left(\sqrt{\frac{P}{K}}+g\right)=0$ *lisés* $f.\,sin.\,(a\sqrt{\frac{P}{K}}+g=0$

*Pag.*133. *l.*27. par l'équation *lisés* pour l'équation

*Pag.*137. *l.* 5. $\int\frac{du}{u}$ *lisés* $\int\frac{dx}{u}$

*Pag.*142. *l.ult.* $\frac{P}{\zeta^2}$ *lisés* $\frac{P}{S^2}$

*Pag.*144. *l.*3. $\zeta^2+\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2\pi^2}\right)$ *lisés* $\zeta^2+\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{2\pi^2}\right)$

*Pag.*160. *l.*2. $\alpha=\frac{\sqrt{(P^2+Q^2)}}{2\,sin.\left(\pi\frac{\sqrt{\omega}-\sqrt{\omega}}{2}\right)}$ *lisés* $\alpha=\frac{\sqrt{(P^2+Q^2)}}{2\,sin.\left(\pi\frac{\sqrt{\omega}-\sqrt{\omega}}{2}\right)}$

*Pag.*186. *l.*12. $\frac{29}{27}$ pour la probabilité *lisés* $\frac{19}{27}$ pour la probabilité

*Pag.*200. 201. en plusieurs endroits à la place de $\int v$ mettez partout $\int V$

*Pag.*203. *l.*18. faisant $d\theta=dx$ *lisés* faisant $d\theta=d\Psi$

*l.*19. dx *lisés* $d\Psi$

*Pag.*209. *l.*3. $+n\frac{(n-1)}{2}x-(\pi+1-2\rho)$ *lisés* $\frac{+n(n-1)}{2}x^{-(\pi+1-2\rho)}$

Pag 211. en plusieurs endroits K *lisés* k

Pag. 225. *l.* 29. l'intégrale de $ya^x dx$ sera $\frac{Ka}{la}$ *lisés* sera $\frac{Ka^x}{la}$

Pag. 230. *l* 1. *Problême II. lisés Problême XI.*

Pag. 233. *l.* 14 $+\frac{2d\Psi}{2dBdC}\varphi^{1}\varphi^{11}+\frac{d\Psi}{2dA^2}$ *lisés* $+\frac{2d\Psi}{2dBdC}\varphi^{1}\varphi^{11}+\frac{dd\Psi}{2dA^2}2\varphi D$

Pag. 249 *l* 21. $BB=\overline{\overline{P'+Q'}}^{m}$ *lisés* $B'B'=\overline{\overline{P+Q'}}^{m}$

BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY

Fig. 3.

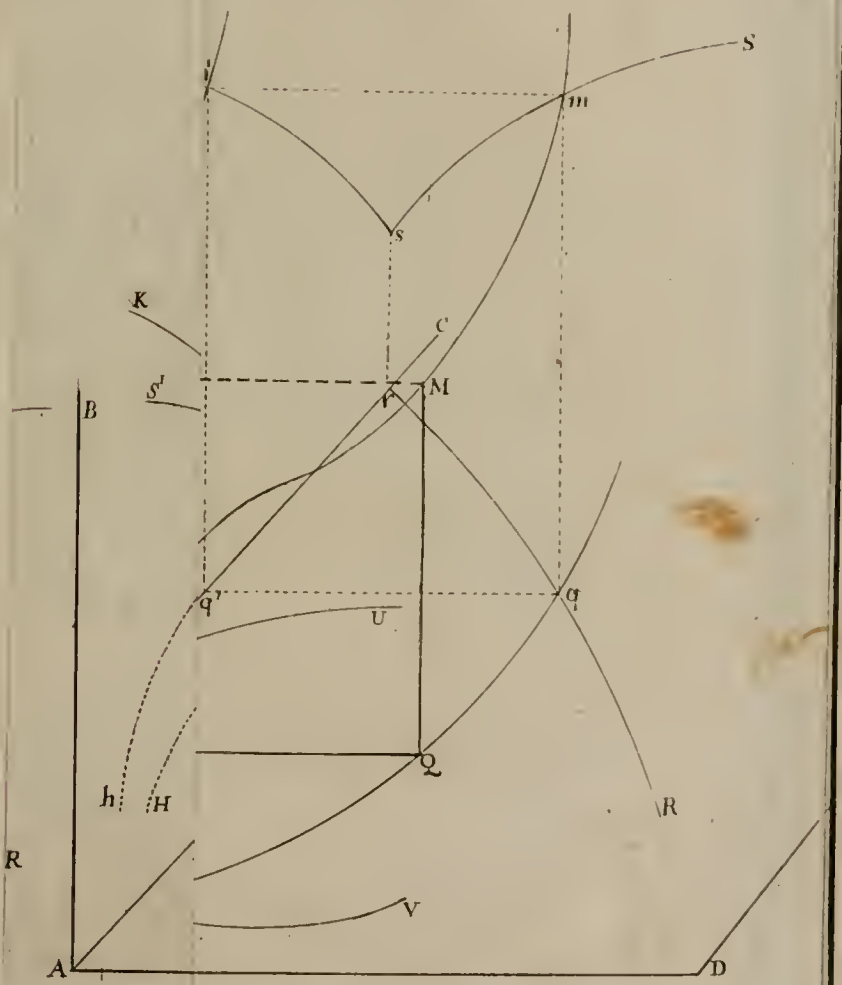

Fig. 1.

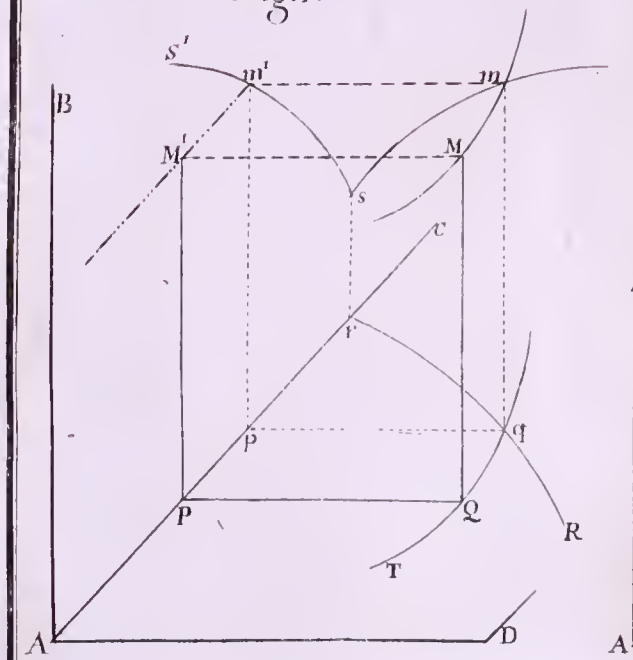

Fig. 2.

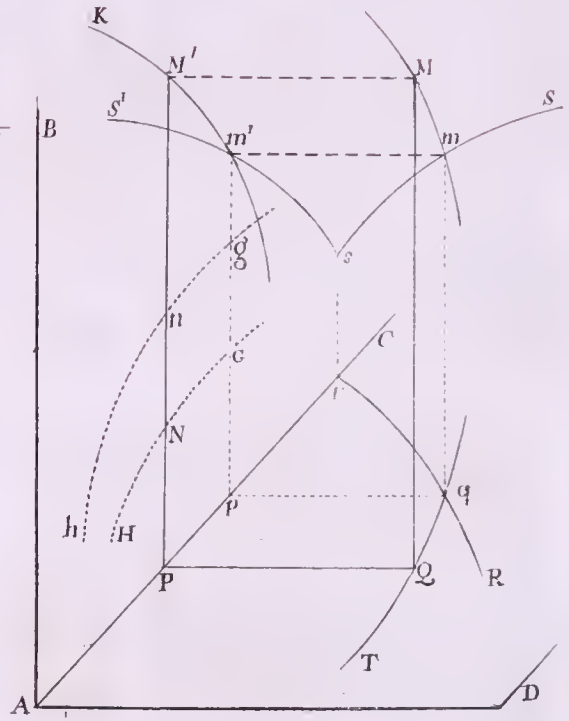

Fig. 3.

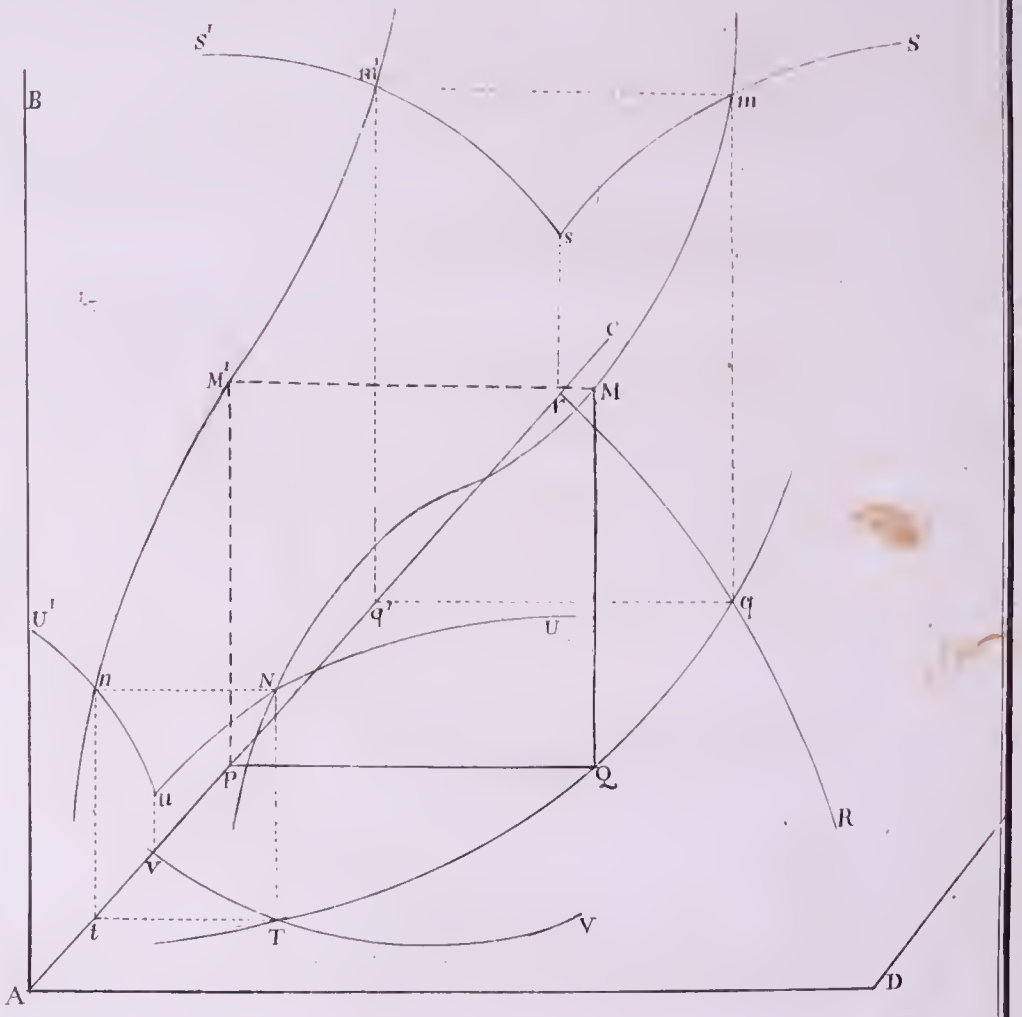

Fig. 45.

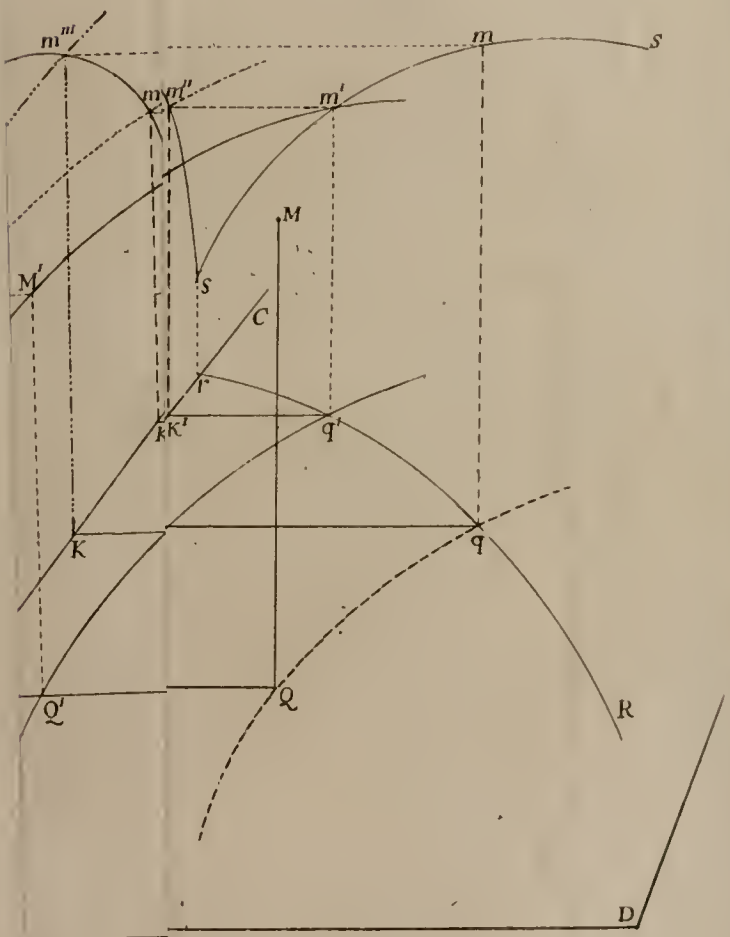

Fig. 4.

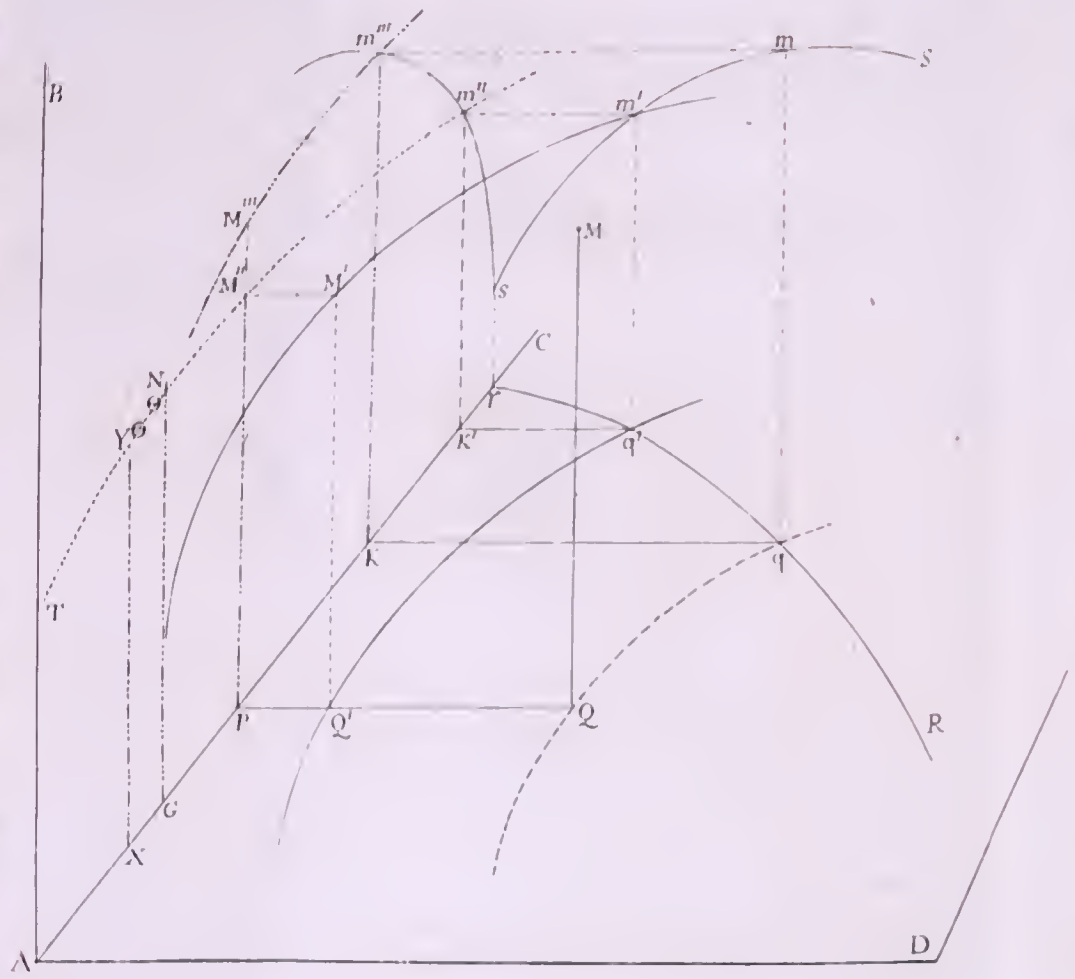
B
A
D
R
S
T
C
K
K'
P
Q
Q'
q
q'
M
M'
M''
M'''
m
m'
m''
m'''
s
N
O
Y
G
X

Fig 5.

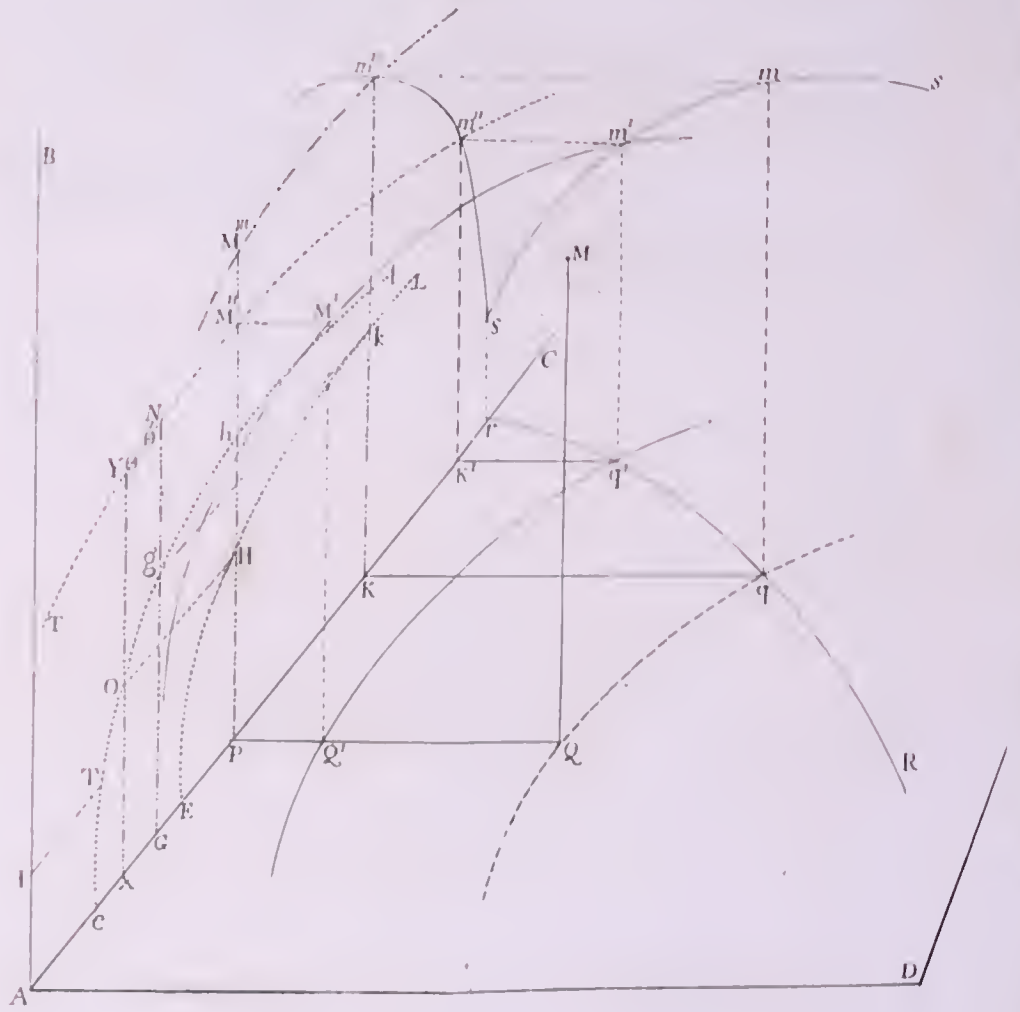
B
A
D
R
S
T
C
K
K'
P
Q
Q'
q
q'
M
M'
M''
M'''
m
m'
m''
m'''
s
N
O
Y
G
X
H
L
E

Fig. 6.

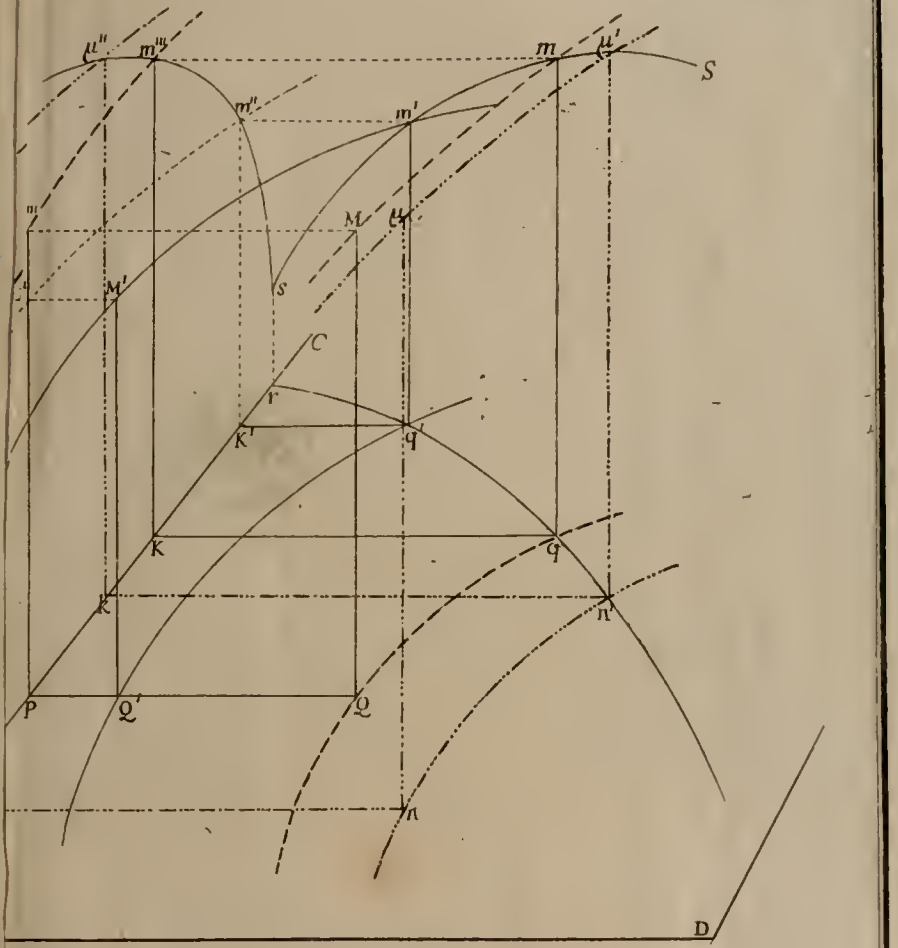

Fig. 6.

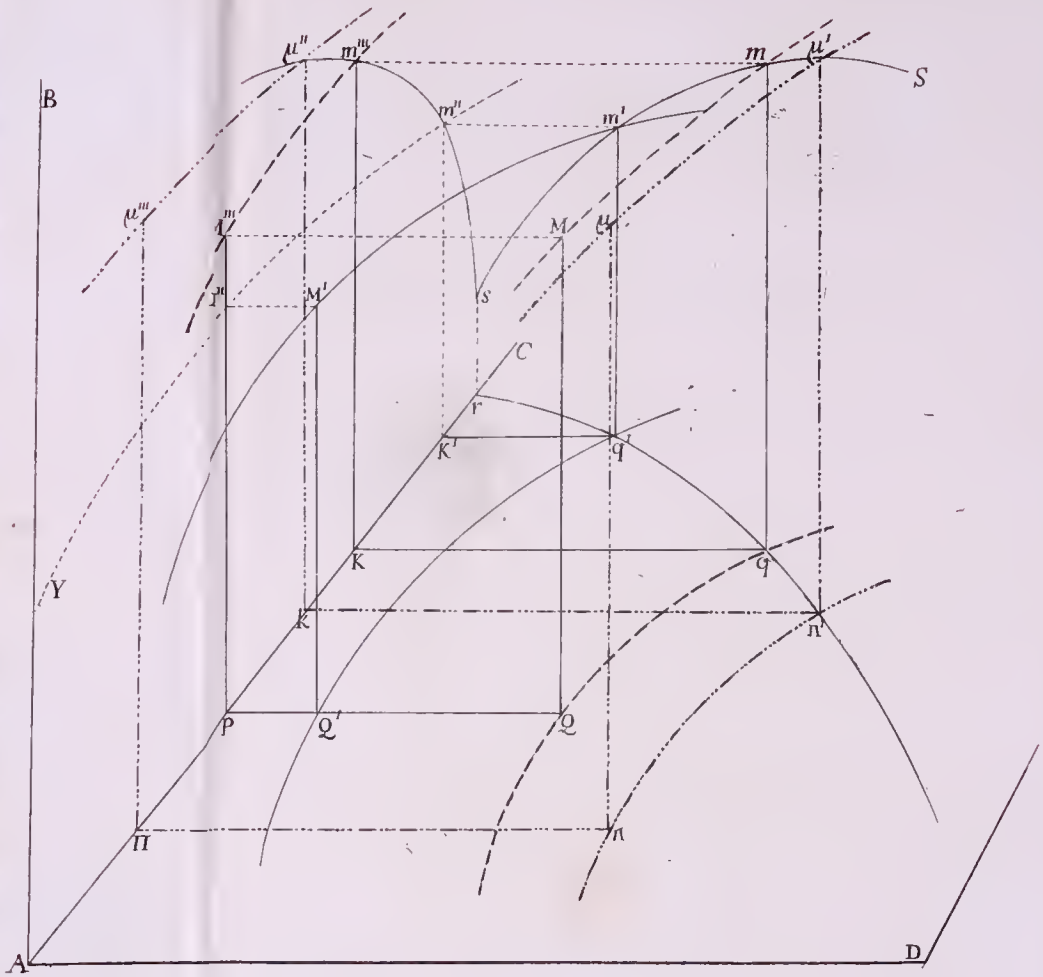

Fig. 7.

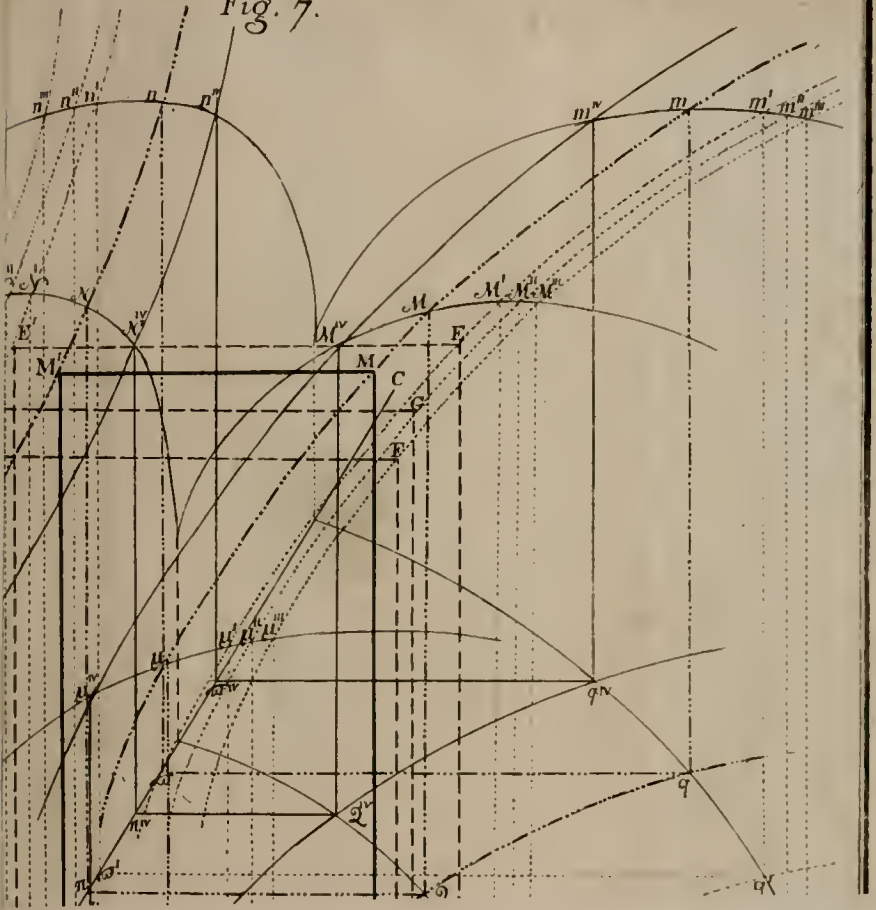

Fig. 7.

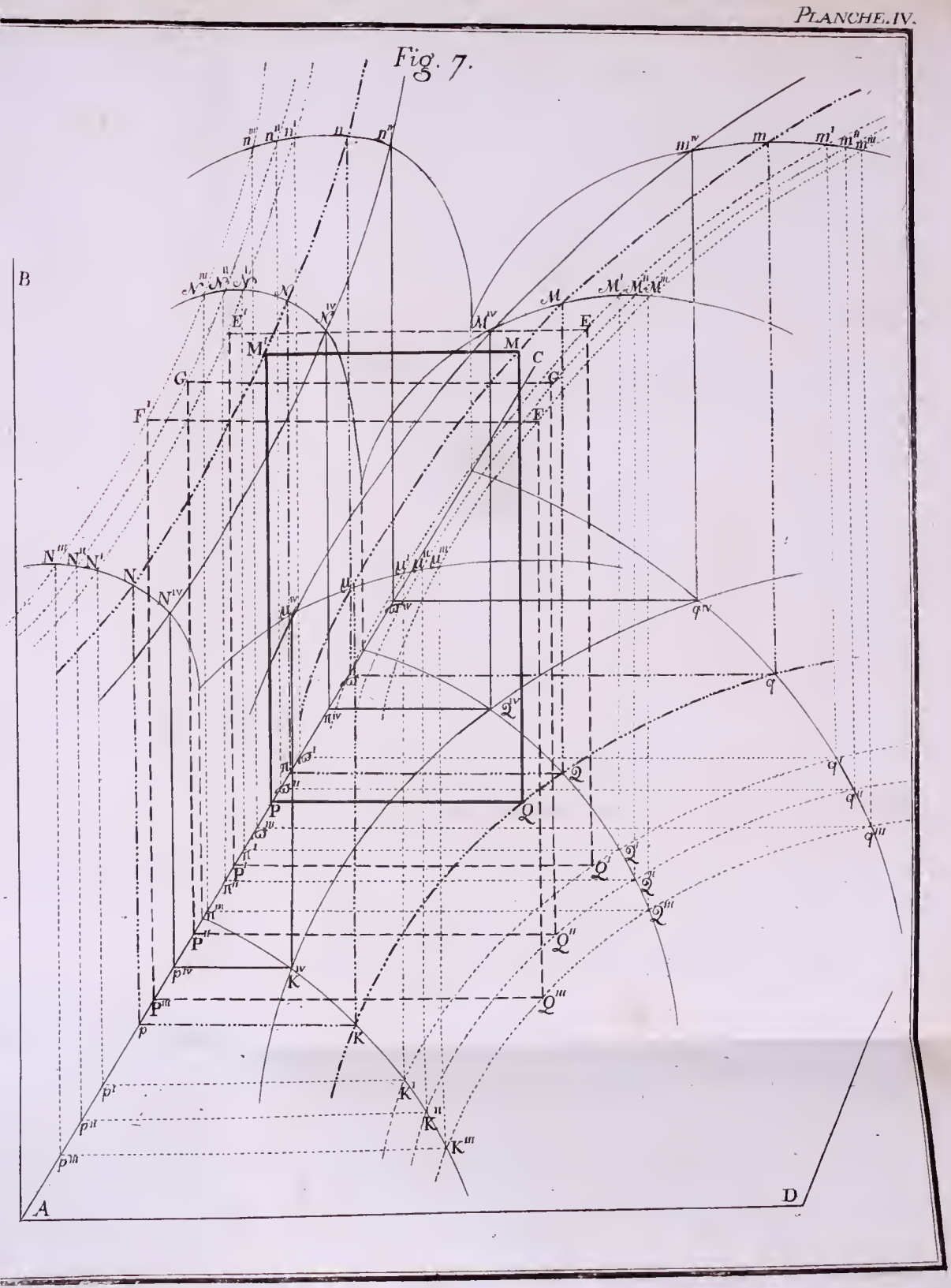

Fig. 1.

Fig. 2.

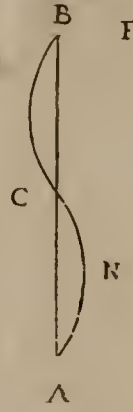

Fig. 3.

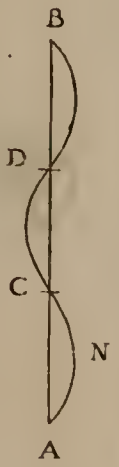

Fig. 1.

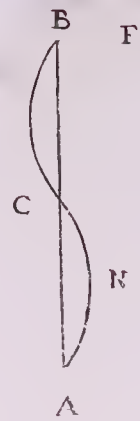

Fig. 2.

Fig. 3.